תרגיל 7

.

.1

(א) נגדיר

$$A=\left(\begin{array}{ccc}1&2&1\\1&3&2\\1&2&1\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

(ב) [סעיף רשות, הוא לא יבדק] נגדיר

$$A=\left(\begin{array}{cc}1&2\\1&3\end{array}\right)\in(\mathbb{Z}_{13})^{2\times2}$$

מצאו את הפולניום האופיני של A, ע"ע שלה ומרחבים עצמיים.

.2 הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכח כי ל A ול A^t יש אותם ע"ע. [הדרכה: הראו כי הפ"א של A ו A^t שווים]

(ב) תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ נגדיר $\overline{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{A_{i,j}}$ כלומר הצמדה של כל איבר ב A (הצמדה מרוכבת). עוד נגדיר $A^*\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ע"י $A^*=\left(\overline{A}\right)^t=\overline{A^t}$. למשל

$$\left(\begin{array}{cc}1-i&2+5i\\1&-3\end{array}\right)^*=\left(\begin{array}{cc}1+i&1\\2-5i&-3\end{array}\right)$$

הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי $\overline{\lambda}$ הוא ע"ע של A^* [הדרכה: הראו כי $\overline{\lambda}$ הוא ע"ע של $\overline{A}$ והשתמש בסעיף הקודם]

(ג) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי אם λ ע"ע של A אזי λ^k ע"ע של A^k לכל k טבעי.

(ד) יהא Vמ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. תהא $T:V\to V$ ה"ל ו $A=[T]_E^E$ מטריצה מייצגת (כאשר E בסיס כלשהוא של V). יהא $v\in V$ ו $\lambda\in\mathbb{F}$נסמן $v'=[v]_E$הוכיחו כי

$$Tv=\lambda v\iff Av'=\lambda v'$$

(ה) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ יהא λ ע"ע של A ו $V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$ המרחב העצמי. הוכיחו כי $V_\lambda \leq \mathbb{F}^n$ הוא תת מרחב (מסקנה: כל צירוף לינארי של ו"ע המשויכים ל λ הוא גם ו"ע של λ, אם הוא שונה מאפס).

(ו) נתונה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

הפולינום האופיני שלה. מצאו A^{-1}. [הערה: עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה עם פ"א $f_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ מתקיים כי $a_0 \neq 0$. ההוכחה ישירה מהעובדה כי $a_0 = f_A(0) = |A|$]

(ז) נתונה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. ונתון

$$f_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

הפולינום האופיני שלה. נתון כי לכל $i \neq j$ מתקיים כי $\lambda_i \neq \lambda_j$ (כלומר כל הע"ע שונים). הוכיחו כי קיים בסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ל $\mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע (כלומר לכל i מתקיים כי v_i הוא ו"ע של A)

בהצלחה!