אלגברה לינארית 2, מדעי המחשב, סמסטר קיץ תשעט, מועד א'

מרצה: תמר בר-און.
מתרגל: אריאל ויצמן.
ענו כל השאלות.
משקל כל שאלה: 27 נקודות.
בשאלות חישוביות, יש להראות במפורש את כל החישובים.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. לכסנו אוניטרית את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. כלומר, מצאו מטריצה אוניטרית P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^*AP = D$.

פתרון:

ראשית, נמצא ע"ע.

$$p_A = \mid xI - A \mid = \left| \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right| = (x-1)^3 - (x-1) =$$

$(x-1)(x^2-2x) = x(x-1)(x-2)$.

כעת נמצא ו"ע.

$$V_2 = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

נקח וקטור מנורמה 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$V_1 = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקח וקטור מנורמה 1: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$V_0 = N\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

נקח וקטור מנורמה 1 : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

לכן $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} P$.

2. יהי $\mathbb{R}^4$ מרחב מכפלה פנימית, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. חשבו את ההיטל של הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v$ על התת מרחב $W^{\perp}$, כאשר $W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

פתרון :

ראשית, נחשב את $W^{\perp}$. $W^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x+y+z=0 \wedge 2y-w=0\right\}$. נבחר

בסיס ל$W^{\perp}$: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. נפעיל גראם שמידט כדי לקבל בסיס או"נ.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

נורמל : $\tilde{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{w_2} = \frac{2}{\sqrt{22}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

לבסוף, $\pi_{W^{\perp}}(v) = \langle v, \tilde{w_1}\rangle\tilde{w_1} + \langle v, \tilde{w_2}\rangle\tilde{w_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{22}} \cdot$

$$\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{11}{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{22}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix}$$

3. יהי $n \geq 2$ ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, מטריצה שמקיימת: $\forall i, j : A_{i,j} = i+j$. הוכיחו שקיימים לה לפחות שני ערכים עצמיים ממשיים שונים.
פתרון:

ראשית, נשים לב ש A סימטרית ולכן לכסינה מעל הממשיים. בפרט, כל הע"ע של A ממשיים. נניח בשלילה שיש לA ע"ע אחד בלבד, λ. אז הפ"מ של A הוא $x-\lambda$. וזה אומר ש $A-\lambda I = 0$, כלומר, $A = \lambda I$. סתירה.

4. תהי $T : V \to V$ העתקה לכסינה, ותהי $S : V \to V$ העתקה כלשהי. הוכיחו: $ST = TS$ אמ"ם, לכל λ ערך עצמי של T, V_λ (המרחב העצמי של הע"ע λ) הוא S- אינווריאנטי. (תזכורת, אם $S : V \to V$, ו$W \leq V$, אז נגיד שW הוא S- אינוואריאנטי אם לכל $w \in W$, $S(w) \in W$).
פתרון:

$\Longleftarrow$ נניח שT וS מתחלפות. יהי λ ע"ע של T וV_λ המ"ע המתאים. יהי $v \in V_\lambda$. כלומר, $T(v) = \lambda v$. נחשב: $T(S(V)) = TSv = STv = S(T(v)) = S(\lambda v) = \lambda Sv$. לכן $Sv \in V_\lambda$.

$\Longrightarrow$ T לכסינה, ולכן קיים למרחב בסיס מו"ע של T. נסמן $B = \{v_1, ..., v_n\}$, כך שלכל i, $Tv_i = \lambda_i v_i$. (יתכן ש $\lambda_i = \lambda_j$ עבור $i \neq j$). בשביל להוכיח ש$ST = TS$, מספיק להוכיח ששתי ההעתקות מזדהות על בסיס מסויים. נוכיח שלכל $v_i \in B$, $TSv_i = STv_i$. ובכן, בגלל ש V_{λ_i} הוא S- אינווריאנטי, $Sv_i \in V_{\lambda_i}$, כלומר $T(Sv_i) = \lambda_i Sv_i$. כעת, $STv_i = S(\lambda_i v_i) = \lambda_i Sv_i$, וקיבלנו שוויון.