פתרון תרגיל 1

תשובה 1:

א. ע"פ אלגוריתם אוקלידס עם מקדמים: m= 4, n=-1 ואכן: $\gcd(21,77) = 7 = 4*21-77$.

ב. מאחר ש $3465 = 150 \cdot 23 + 15$ ו- $150 = 10 \cdot 15 + 0$

לכן $15= \gcd(150,15) = \gcd(3465,150)$.

עפ"י האלגוריתם רואים ישירות (שורה ראשונה) ש- $15 = 1 \cdot 3465 - 150 \cdot 23$

כלומר $m = 1, n = -23$

ג. מציאת $\gcd(30,455)$ עפ"י האלגוריתם של אוקלידס:

מאחר ש $455 = 30 \cdot 15 + 5$ ו- $30 = 6 \cdot 5 + 0$

לכן $\gcd(455,30) = \gcd(30,5) = 5$

ועפ"י האלגוריתם נקבל ש: $5 = 455 \cdot 1 - 30 \cdot 15$ כלומר $m = -15, n = 1$.

תשובה 2:

ניעזר בתכונה של gcd: $\gcd(am,an) = a \cdot \gcd(m,n)$.

$(a/d,b/d) = 1$ אם ורק אם $d \cdot (a/d,b/d) = d$ אם ורק אם (לפי התכונה הנ"ל) $(a,b) = d$.

תשובה 3:

על פי החישובים למטה ואלגוריתם אוקלידס נקבל:

$(840,575) = (575,265) = (265,45) = (45,40) = 5$

$840 = 1 \cdot 575 + 265$

$575 = 2 \cdot *265 + 45$

$265 = 5 \cdot 45 + 40$

תשובה 4:

א.

$d = (a,b)$ לכן קיימים s,t שלמים כך ש $d = sa + tb$. עתה, מאחר ש $x|a$ ו- $x|b$, לפי מה שהראנו בכיתה x מחלק כל צירוף לינארי מעל השלמים שלהם ובפרט את $sa + tb$.

ב.

נסמן ב- $d=(b,c)$ ו- $e=(ab,ac)$. מכיוון ש- $ad|ab,ac$ נובע ש- $ad|e$. קיימים s,t כך ש- $d=sb+tc$. לכן $ad=sab+tac$, מכיוון ש- $e|ab,ac$ נובע ש- $e|ad$ וסיימנו.

ג.

יהי $e|a+b,a-b$ (כלומר e מחלק של $a+b,a-b$). לכן $e|2a,2b$ ומכאן לפי תרגיל קודם $e|(2a,2b)$. אבל $(2a,2b)=2(a,b)=2d$ לכן $e|2d$. כלומר כל מחלק של $a+b,a-b$ מחלק את ולכן גם המחלק המשותף המקסימלי

ד.

קיימים x, y, s, t כך ש $(a,c)=sa+tc$, $(a,b)=xa+yb$ נכפול את משוואות אלו ונקבל של $(a,b)(a,c)=(xa+yb)(sa+tc)=z_1a+z_2bc$ עבור z_1, z_2 שלמים (z_1 מתקבל מ3 מחוברים במכפלה) . מאחר ש $(a,bc)\mid a,\ bc$ הוא גם מחלק כל צירוף לינארי שלהם מעל השלמים ובפרט את z_1a+z_2bc.

<u>תשובה 5:</u>

b | c , a | c לכן קיימים מספרים שלמים r, s כך ש $c=ar=bs$, כמו כן, נתון ש $\gcd(a,b)=1$ לכן קיימים שלמים x, y כך ש $ax+by=1$. מכאן נקבל ש $c=c\cdot 1=c(ax+by)=acx+bcy=a(bs)x+b(ar)y=ab(sx+ry)$. ועפ" ההגדרה של "מחלק את" $ab\mid c$

<u>תשובה 6:</u>

א.ניתן לכתוב את המשוואה כ- 17x + 53k = 1. מכיוון ש- 1=(17,53) , נקבל, ע"פ אלגוריתם אוקלידס עם מקדמים, ש- x,k הם המקדמים של 17,53 כאשר מציגים את 1 כצירוף לינארי שלהם.

אזי $53 = 3\cdot 17 + 2$ לכן $2 = -53 + 3\cdot 17$. $17 = 8\cdot 2 + 1$ לכן

$1 = 17 - 8\cdot 2 = 17 - 8(53 - 3\cdot 17) = 25\cdot 17 - 8\cdot 53$

לכן x = 25

ב. ראשית נפתור את מערכת המשוואות: $x \equiv 2 \ (mod\ 3)$, $x \equiv 1 (mod\ 11)$.

מכיוון ש- 1 = (3,11) נקבל ש- $22\cdot 11 - 7\cdot 3 =$. לכן, פיתרון של שתי המשוואות הנ"ל הוא

$x = 2\cdot 11\cdot 2 + (-7\cdot 3)\cdot 1\ (mod\ 33) = 44 - 21\ (mod\ 33) = 23\ (mod\ 33).$

לכן צריך לפתור עתה את מערכת המשוואות: $a = 4\ (mod\ 5)$, $a = 23\ (mod\ 33)$.

מכיוון ש- 1=(33,5) נקבל ש- 1 = 13·5 – 2·33. לכן, פיתרון של שתי המשוואות הנ"ל הוא

$a = 2\ 33\ 4 + (-13\ 5)\ \ 23\ (mod\ 33\ 5) = 264 - 1495\ (mod\ 165) = -1231\ (mod\ 165)$

לכן a = -1231 הוא פתרון של מערכת המשוואות הנ"ל (למשל –
$(-1231\ (mod\ 5) = -1 (mod\ 5) = 4 (mod\ 5)$.