# תרגיל 4

להגשה לא יאוחר מיום רביעי ו' כסלו (18.11) בתרגול או בתא של המתרגל

שאלה 1

תהיינה $A,B$ קבוצות. הוכיחו: $P(A)\subseteq P(B) \iff A\subseteq B$

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח $P(A)\subseteq P(B)$, ויהי $a\in A$, אזי $\{a\}\in P(A)$ וכיון ש־ $P(A)\subseteq P(B)$ נובע ש־ $\{a\}\in P(B)$, ולכן $a\in B$.

$\Rightarrow$: נניח $A\subseteq B$, ויהי $X\in P(A)$, לכן $X\subseteq A$, וכיון ש־ $A\subseteq B$ נובע ש־ $X\subseteq B$, ולכן $X\in P(B)$.

שאלה 2

הוכיחו: $P(A)\cap P(B)=\{\phi\} \iff A\cap B=\phi$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח $P(A)\cap P(B)=\{\phi\}$, ונניח בשלילה שקיים $x\in A\cap B$, אזי $\phi\neq\{x\}\in P(A)\cap P(B)$ בסתירה. לכן $A\cap B=\phi$.

$\Rightarrow$: נניח $A\cap B=\phi$. נשים לב שלכל קבוצה $X$ מתקיים ש־ $\phi\in P(X)$, ולכן ברור ש־ $\{\phi\}\subseteq P(A)\cap P(B)$, ונותר להוכיח את ההכלה השניה. יהי $X\in P(A)\cap P(B)$, אזי $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$, ולכן $X\subseteq A\cap B=\phi$ ולכן $X=\phi$.

שאלה 3

הוכיחו או הפריכו:

א. $(A\bigtriangleup B)\bigtriangleup(A\cap B)=A\cup B$.

ב. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$.

ג. תהי $U$ הקבוצה האוניברסלית. אזי: $A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c]=\phi$.

פיתרון:

א. הוכחה. טענת עזר: אם $X\cap Y=\phi$ אז $X\triangle Y=X\cup Y$.

הוכחת טענת העזר: $X\triangle Y=(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=(X\cup Y)\setminus\phi=X\cup Y$.

כעת אצלנו נשים לב ש־ $(A\triangle B)\cap(A\cap B)=\phi$ ולכן $(A\triangle B)\triangle(A\cap B)=(A\triangle B)\cup$ $(A\cap B)=[(A\cup B)\smallsetminus(A\cap B)]\cup(A\cap B)=A\cup B$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון זה בדיוק טענת העזר. השיוויון השני זו שקילות של ההפרש הסימטרי. והשיוויון השלישי נובע מכך ש־ $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$ וראינו בכיתה שלכל שתי קבוצות אם $X\subseteq Y$ אז $X\cup(Y\smallsetminus X)=Y$.

ב. הפרכה: $A=\{1,2\},B=\{1,3\},C=\{1,4\}$, אזי $(A\smallsetminus B)\smallsetminus C=\{2\}\smallsetminus\{1,4\}=$ $\{2\}$, אבל $A\smallsetminus(B\smallsetminus C)=\{1,2\}\smallsetminus\{3\}=\{1,2\}\neq\{2\}$.

ג. הוכחה: $A\cap[(B\cup A^c)\cap B^c]=[A\cap(B\cup A^c)]\cap B^c=[(A\cap B)\cup(A\cap A^c)]\cap B^c=$ $[(A\cap B)\cup\phi]\cap B^c=(A\cap B)\cap B^c=A\cap(B\cap B^c)=A\cap\phi=\phi$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון נובע מחוק האסוציאטיביות. השיוויון השני זה חוק הפילוג. השיוויון השלישי נובע מכך שחיתוך של קבוצה עם המשלים שלה זו הקבוצה הריקה. השיוויון הרביעי אומר שאיחוד עם הקבוצה הריקה לא משפיע. השיוויון החמישי זה שוב חוק האסוציאטיביות, השיוויון השישי כשלישי והשיוויון השביעי נובע מכך שחיתוך עם הקבוצה הריקה הוא ריק.

שאלה 4

הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ב. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ג. $P(A\smallsetminus B)=P(A)\smallsetminus P(B)$.

ד. $P(A\triangle B)=P(A)\triangle P(B)$.

ה. תהי $U$ הקבוצה האוניברסלית אזי: $P(A^c)=(P(A))^c$.

פיתרון:

א. הוכחה: יהי $X\in P(A)\cap P(B)$ אמ"ם $X\subseteq A\wedge X\subseteq B$ אמ"ם $X\subseteq A\cap B$ אמ"ם $X\in P(A\cap B)$.

ב. הפרכה: $A=\{1\},B=\{2\}$ אזי $P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\}\}\cup\{\phi\{2\}\}=$ $\{\phi,\{1\},\{2\}\}\neq\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=P(\{1,2\})=P(A\cup B)$.

ג. לכל שתי קבוצות שוות $A=B$ נקבל ש־ $P(A)=P(B)$ ולכן $P(A)\smallsetminus P(B)=\phi$ אבל $P(A\smallsetminus B)=P(\phi)=\{\phi\}\neq\phi$. תבחרו איזה קבוצות שוות שאתם רוצים וזו תהיה ההפרכה...

ד. גם כאן קבוצות שוות יעבוד בדיוק אותו דבר כי הפרש סימטרי של קבוצות שוות זה הקבוצה הריקה.

ה. נשים לב שלכל קבוצה $X$ מתקיים ש־ $\phi \in P(X)$ ולכן מצד אחד $\phi \in P(A^c)$, אבל כיון שגם $\phi \in P(A)$ נובע ש־ $\phi \notin (P(A))^c$.