מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 4

השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookleftarrow} (X,d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

הערה:

קל לבדוק שהסגור $cl(\mathrm{A})$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$): לכל מ"מ (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

הוכחה: למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \in Banach$.

$$l_\infty(X) = \{f: X \to \mathbb{R} | \text{חסום } f(X)\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a,x) - d(z,x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a,x) - d(z,x)| \le \underbrace{d(a,z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a,b \in X: \boxed{d(a,b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|}$.

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x\in X}\left|\left(d(a,x) - d(z,x)\right) - \left(d(b,x) - d(z,x)\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in X} |d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x \in X} |d(a,x) - d(b,x)| \geq \sup|d(a,b) - 0| = d(a,b)$$

☺

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

הסבר ב 2 דרכים:

<u>דרך I:</u> הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).

$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

<u>דרך II:</u> "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{$סדרות קושי ב $(X,d)\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר $\tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

שלב ב':

טענת עזר: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M \coloneqq \tilde{X}/\Omega = \{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x] \coloneqq \{y \in \tilde{X} \,|\, \tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\overline{d}([x],[y]) = \tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\overline{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $[x] \mapsto x ,(\mathrm{M},\overline{d}) \to (\tilde{X},\tilde{d})$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $x \longmapsto [\tilde{x}] \qquad X \overset{i}{\hookrightarrow} M$

כאשר $\tilde{x} \in \tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x \ldots$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y) = \overline{d}([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

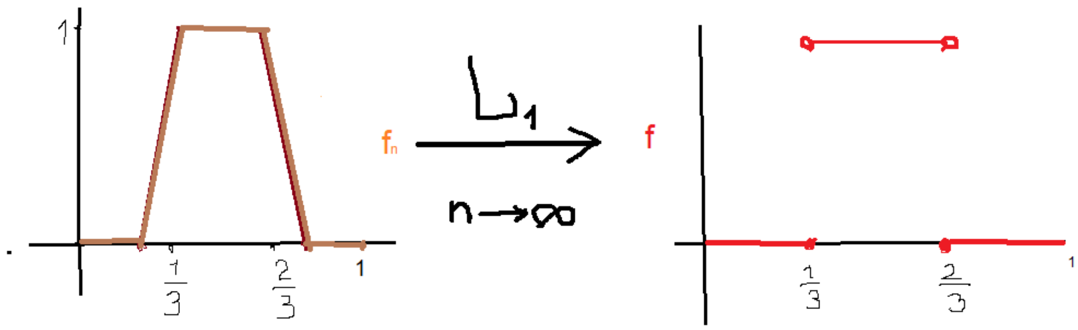
$$\overline{\iota(X)} = M$$

(M,ρ) מרחב שלם. ☺

דוגמה 1: $\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n}$.

דוגמה 2: $L_1[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנס ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:

כאשר: $E = \left\{ f \middle| \int_a^b |f| dx = 0 \right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a,b] = \widetilde{L_1}/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

3) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

<u>תזכורת:</u> $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנס ב $- X$.

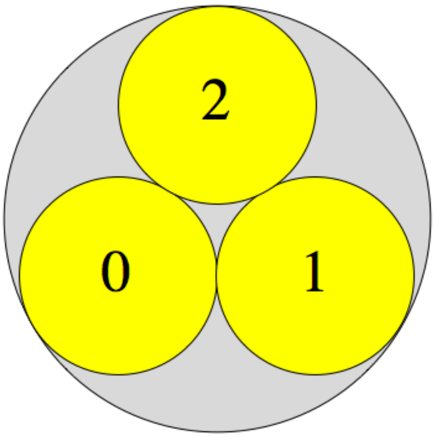
דוגמה 4: $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

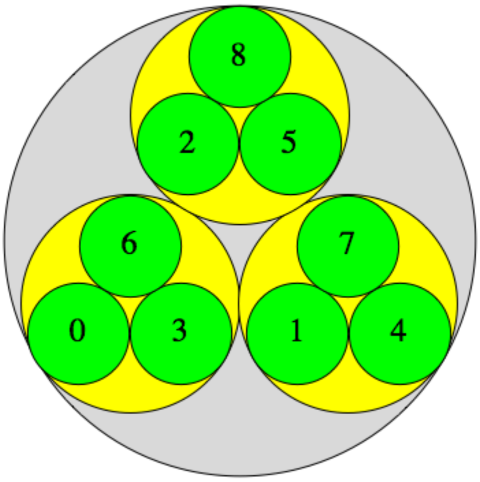
$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\text{שלמים } p - \text{אדיים}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,, b_k \in \underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{p \text{ שאריות מודולו}} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

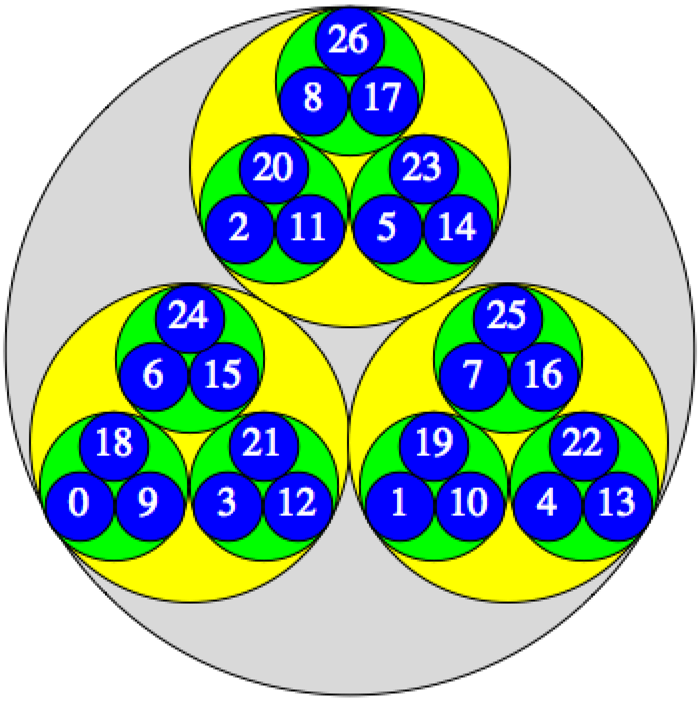
שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>שאלה</u>: א. כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?

ב. בתרגול הראשון למדתם על האולטרה מטריקה של מרחק בין מילים, מה הקשר?







....

מרחבים טופולוגיים

<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq \{A|A\subseteq X\} =: P(X)$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset, X\in\tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i\in\tau$ עבור $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $\Leftarrow$ $O_1\cap O_2\cap\dots\cap O_n\in\tau$

(מספיק עבור $n=2$).

t_3) (איחודים) $O_i\in\tau$ עבור $i\in I$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X,τ) הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

<u>הגדרות נוספות:</u>

א) אומרים ש - $A\subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X,τ)) אם

$$\boxed{A\in\tau \overset{def}{=} \text{פתוחה } A}$$

ב) תת קבוצה $A\subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X,τ)) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{\text{פתוחה } A^c \overset{def}{=} \text{סגורה } A}$$

<u>דוגמאות:</u>

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X,d): $\big(X,top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d)=\{\text{קבוצות פתוחות במובן } d\}$.

<u>הגדרה</u>: אומרים שמ"ט (X,τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau=top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

<u>משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות):</u> לכל מ"ט (X,τ) מתקיים:

t_1^c) $X,\emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד <u>סופי</u> של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

<u>הוכחה:</u> כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

<u>הגדרה</u>: **קבוצה סגוחה** = סגורה+פתוחה.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} \coloneqq \{\emptyset, X\}$. (X, τ_{tr}) **מרחב טריוויאלי**.

<u>הערה:</u> מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} \coloneqq P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגוחה)

<u>שימו לב:</u> בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

<u>הגדרה</u>: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$

(נקודון פתוח!).

<u>לכן:</u> מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

<u>הערה:</u> מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 0-1).

<u>הערה:</u> לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

<u>הגדרה</u>: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* \coloneqq \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ <u>לא</u>. מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

<u>הגדרה (תת מרחב טופולוגי):</u> יהי $(X, \tau) \in TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y: $\tau_Y \coloneqq \{\, O \cap Y | O \in \tau\}$

תבדקו ש $(Y, \tau_Y) \in TOP$

הערה: $\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\},\ (X,d) \mapsto (X, top(d))$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

<u>הסבר ב':</u> (שקילות טופולוגית של מטריקות)

<u>הסבר א':</u> שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

<u>דוגמה:</u>

- מ"ט טריוויאלי (X,τ_{tr}) עם X לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X \coloneqq \{0,1\}$. (X,τ_*) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_* = \left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\},\tau_*) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש - $(\{0,1\},\tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho) = \tau_*$.

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $\tau_* \neq top(d_0) = \{\emptyset,\{0,1\}\}$.

2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $\tau_* \subsetneq top(\rho) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\tau_{cof} \coloneqq \{F^c : F \subseteq X \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

לבדוק: (X,τ_{cof}) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} | F \subset \mathbb{R} \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$

רמז: לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

הגדרות:

יהי (X, τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה O $(\ni \tau)$

כך ש $a \in O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

אזהרה: סביבה לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $A \subseteq X$** אם

$\exists O \in \tau: A \subseteq O \subseteq V$

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

הערה: תמיד $int(A) \subseteq A$.

טענה: $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

הסבר: שימוש ב t_3 $\quad A = \bigcup_{a \in A} O_a \in \tau$ ...

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים $\mathcal{E}$-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

הגדרה: התכנסות סדרות

$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$

לסדרה x_n במ"ט (X, τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$$\forall U \in N(a) \exists n_0 \in N(a):\ n \ge n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

סימון: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

הגדרה: **רציפות פונקציות**

נניח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *רציפה בנקודה* $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \quad \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X,Y)$.

הערה: (כמו במ"מ) פונקציה $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f: X \to Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau \quad \forall O \in \sigma$.

הגדרה: X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

משפט: (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי (X,τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

הוכחה: נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ קיימות <u>סביבות זרות</u> $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, <u>וגם</u> V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

סתירה! ☺

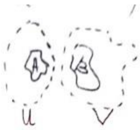
אקסיומות הפרדה נוספות:

הגדרות: נניח $A \subseteq X$,$B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X,τ)) אם

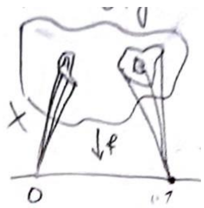
$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות).



ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$



טענה: מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

הוכחה: ניקח סביבות פתוחות זרות של 0,1 ב - $[0,1]$.

$$\underbrace{U := \left[0,\frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3},1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A, B. ☺

הגדרה: X מקיימת **תכונת T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $\exists U \in N(a): b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B): a \notin V$

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ((1) **וגם** (2)).

תרגיל: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (רמז: (t_2^c))

הערה: תמיד $(X, \tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

הגדרה (תזכורת): X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

הגדרה: X מקיימת **תכונה T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B יש $a \notin B$ הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי $Regular = T_3($ב$)$)

הערה: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

הגדרה: X מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

$($ב$)^f$ לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

הערות:

- מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או *רגולרי לחלוטין*

(לעיתים רק על $T_{3\frac{1}{2}}(\text{ב})^f$ אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).

<u>הגדרה:</u> X מקיימת **תכונת T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).

<u>הערות:</u>

- לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.
  (ולעיתים אומרים נורמלי על $T_4(\text{ב})$ בלבד)
- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

<u>משפט $Urysohn$:</u> יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות <u>סגורות</u> <u>זרות</u> קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ $"Onion\ Argument"\ of\ Urysohn$.

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metriz$$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$, $T_4 \supset Comp \cap T_2$, וגם את משפט Urysohn.

<u>הערה:</u> לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה - $Separation\ Axioms$.

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_*) \in T_0$ (כי $1 \notin \{0\} \in N(0)$)

$(\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$ (כי $\{0\}$ לא סגור)

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$ (כל נקודון $\{a\}$ סגור כי $X \setminus \{a\} \in \tau_{cof}$)

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

תזכורת: $\tau_{cof} := \{F^c \mid F \subseteq \mathbb{R}\ \text{סופית}\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X אינסופית.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

ולכן $\emptyset \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$

אז $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה! ☺

הגדרה: **הסגור - *closure***: עבור $A \subseteq X$ נגדיר

$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A.

הערה: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

תרגיל: $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה .

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \overset{\tau}{\rightarrow} z$$

- **טענה:** במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$.

הוכחה: הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.
נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z .
לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$
לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.
☺

שאלה: א. למצוא מ"ט (X,τ) שבו לא תמיד $scl(A) = cl(A)$ (ואז (X,τ) לא מטריזבילי).
ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau) \in T_2$.

יום העצמאות שמח !