לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעו, מועד א'

25 באוגוסט 2020

1. משפט מההרצאה (בנושא הפיכות).

2. יהא V מ"ו ו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. ותהא $T : V \to V$ המוגדרת ע"י משפט ההגדרה

$$\begin{aligned} Tv_1 &= 0 \\ Tv_2 &= v_1 \\ &\vdots \\ Tv_n &= v_{n-1} \end{aligned}$$

(א) מצאו את $[T]_B^B$

פתרון: לפי הגדרת מטריצה מייצגת

$$\begin{aligned} [T]_B^B &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Tv_1]_B & [Tv_2] & \cdots & [Tv_n]_B \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [0]_B & [v_1]_B & \cdots & [v_{n-1}]_B \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) מצאו בסיס ל $\ker T$ ול $\mathrm{Im} T$

פתרון: כמו שחישבנו -

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

נשתמש בכך ש $[\ker T]_B = N([T]_B^B)$ ו $[\mathrm{Im} T]_B = C([T]_B^B)$.

נחשב את מרחב האפס של $[T]_B^B$: המטריצה כבר בצורה מדורגת ויש משתנה חופשי יחיד $x_1 = t$ ואז מקבלים ש

$$N\left([T]_B^B\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן (כיוון ש $[v_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) נקבל ש $\ker T = \text{span}\{v_1\}$.

נחשב את מרחב העמודות של $[T]_B^B$: המטריצה בצורה מדורגת ויש לה איברים מובילים בעמודות 2 עד n ולכן עמודות אלו במטריצה המקורית (שהיא $[T]_B^B$) הם בסיס למרחב העמודות, כלומר

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$$

בסיס ל $C([T]_B^B)$ (כאשר e_i זה וקטור של אפסים, פרט למיקום i שבו יש 1) ולכן

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$$

בסיס של $\text{Im}T$. עוד פתרון:

$$\text{Im}T = \text{span}\{Tv_1, Tv_2 \dots, Tv_n\} = \text{span}\{0, v_1, \dots, v_{n-1}\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

ומכיוון ש $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ בת"ל (תת קבוצה של קבוצה בת"ל) היא בסיס של $\text{Im}T$

3. יהא V מ"ו, ותהא $T: V \to V$ ה"ל. הוכיחו שלכל שני בסיסים B, C של V מתקיים כי $\det[T]_B^B = \det[T]_C^C$

פתרון: יהיו B, C בסיסים של V ונשתמש במשפטים מההרצאה לגבי מטריצות מייצגות/מטריצות מעבר בין בסיסים

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

ולכן מכפיליות הדטרמיננטה נקבל

$$\det[T]_C^C = \det[I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C = \det[I]_C^B \det[T]_B^B \det[I]_B^C = \det[T]_B^B$$

כאשר המעבר $(*)$ מסתמך על כך ש $[I]_C^B = \left([I]_B^C\right)^{-1}$ וש $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ (לכל מטריצה ריבועית הפיכה A).

4. נתונים ת"מ של $\mathbb{R}^4$,

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}, W_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס ל W_1, W_2 לחיתוך שלהם ולסכום שלהם.

פתרון: נציג את W_1 ע"י span

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ומכיוון ש $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ בת"ל (אחד לא כפולה של השני) נקבל כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_1.

עבור W_2 - נדרג את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&0&1\\1&1&3\\0&1&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&4\\0&-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}&1\\0&1&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&4\\0&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&4\\0&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בכל עמודה של מודרגת של A יש איבר מוביל ולכן עמודות A בת"ל ולכן $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\3\\5\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של W_2 (נתון שהיא קבוצה פורשת של W_2)

עבור הסכום: נדרג את

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&0&1\\0&1&1&1&3\\1&1&0&1&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&0&1\\0&1&1&1&3\\0&1&-2&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&2\\0&0&-3&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&1&4\\0&1&1&0&1\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בעמודות 1 עד 4 ולכן עמודות 1עד 4 של B הם בסיס של $C(B)$ ומכיוון ש

$$W_1+W_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\3\\5\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\3\\5\end{pmatrix}\right\}=C($$

נקבל כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ הם בסיס ל W_1+W_2 (הערה: כיוון שהממד $\dim W_1+W_2=4$ ו $W_1+W_2\subseteq\mathbb{R}^4$ הם שווים.)

חיתוך: נתשמש במשפט המימדים ונקבל כי

$$\dim W_1\cap W_2=\dim W_1+\dim W_2-\dim\left(W_1+W_2\right)=2+3-4=1$$

נעביר למשוואות: W_2-

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&4&x_1\\1&0&1&x_2\\1&1&3&x_3\\0&1&5&x_4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&4&x_1\\0&-\frac{1}{2}&-1&x_2-\frac{1}{2}x_1\\0&\frac{1}{2}&1&x_3-\frac{1}{2}x_1\\0&1&5&x_4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&4&x_1\\0&-\frac{1}{2}&-1&x_2-\frac{1}{2}x_1\\0&0&0&x_3+x_2-x_1\\0&0&3&x_4+2x_2-x_1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&4&x_1\\0&-\frac{1}{2}&-1&x_2-\frac{1}{2}x_1\\0&0&3&x_4+2x_2-x_1\\0&0&0&x_3+x_2-x_1\end{array}\right)$$

ולכן

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid -x_1+x_2+x_3=0\right\}$$

נעביר W_1 למשוואות -

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 - x_2 \end{array}\right)$$

ולכן

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

ולכן

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $W_1 \cap W_2$.

.5

(א) האם קיימת $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ ה"ל המקיימת $T^2=0$ ובנוסף $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}T$. אם כן, מצאו נוסחה מפורשת ל T.

פתרון: רואים כי $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$ בת"ל. נשלים אותם לבסיס של $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&2\\1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

אין איברים מובילים בעמודה 3 ו 4 ולכן נוכל להשלים לבסיס ע"י e_3,e_4. כלומר $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

בסיס של $\mathbb{R}^4$. כעת נגדיר T ע"י משפט ההגדרה

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ואז

$$T^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T^2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T^2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}=T^2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן $T^2=0$ (כי יש העקתה אחת ויחידה, לפי משפט ההגדרה, שמקיימת שכל איברי B נשלחים לאפס. מכיוון שהעתקתה האפס

מקיימת זאת- היא העתקה היחידה). בנוסף, לפי הגדרת T מתקיים כי $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}T$ ולכן נשאר לנו למצוא את T

מפורשות: $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = ?$. יהא $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ נציג אותו כצי"ל של איברי B

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 2 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & -2 & 0 & 1 & d-2a \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d+2a-2b \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d+2a-2b \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d+2a-2b \end{array}\right)$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (b-a)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} + (2a-b)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + (2a-2b+d)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ולכן (כיוון ש T ה"ל)

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} &= (b-a)\,T\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} + (2a-b)\,T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + (2a-2b+d)\,T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= c\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} + (2a-2b+d)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2a-2b+c+d\\2a-2b+2c+d\\0\\2c\end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ב) תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועיות כך ש A סימטרית, B אנטי-סימטרית ו AB אנטי-סימטרית. הוכיחו $AB=BA$
פתרון: נחשב, לפי הנתונים ולפי חוקי שיחלוף נקבל

$$-AB=(AB)^t=B^tA^t=-BA$$

נכפיל ב -1 לקבל $AB=BA$ כנדרש.

.6

(א) נתונה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

חשבו את A^{2016},A^{2017}
פתרון: נחשב,חזקות ראשונות של

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

נתחיל

$$A^2=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$$A^3=AA^2=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$A^4=AA^3=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

ונדלג על A^5 ונגיע

$$A^6=A^3A^3=\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccc}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\\hline0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)=I$$

ולכן $\left(A^6\right)^k=I^k=I$ לכל k טבעי. ולכן $A^{2016}=\left(A^6\right)^{336}=I^{336}=I$ ובנוסף $A^{2017}=A^{2016}A=IA=A$.

(ב) מצאו לאילו ערכי a, אם בכלל, הקבוצה הבאה בת"ל $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \\ 3a+1 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון: שאלה שקולה - מתי עמודות המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2a \\ -a & 0 & 3a+1 \end{pmatrix}$$

בת"ל. מכיוון שהמטריצה ריבועית, זה שקול לכך ש A הפיכה. באופן שקול נבדוק מתי $\det A \neq 0$. נפתח לפי עמודה שניה

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ -a & 3a+1 \end{pmatrix} \right| + 0 \\ &= -\left(3a+1-(-a)\,2a\right) \\ &= -\left(3a+1+2a^2\right) \end{aligned}$$

מתי $2a^2+3a+1=0$? נשתמש בנוסחת השורשים $a_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3\pm1}{4} = -1, -\frac{1}{2}$. תשובה סופית: הוקטורים של השאלה בת"ל אמ"מ $a \neq -1$ וגם $a \neq -\frac{1}{2}$.