מחלקות שקילות וקבוצת המנה

הגדרה:

יהא R יחס שקילות על A אזי (רפלקסיבי, טרנזיטיבי, סימטרי)

1. לכל $x \in A$ מוגדרת **מחלקת השקילות של x** להיות
$\bar{x} = [x]_R := \{y \in A | (x, y) \in R\}$
2. **קבוצת המנה** מוגדרת $A/R := \{[x]_R | x \in A\}$ $A/_R$

מהן מחלקות השקילות מהדוגמא הקודמת?

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A_1=\{1,3\}$ $A_2=\{2,4,5\}$ $A_3=\{6\}$

$xRy \Leftrightarrow \exists i: x,y \in A_i$

$[1]_R = \{1,3\} = A_1 = [3]_R$

$[2]_R = A_2$

$[6]_R = A_3$

$A/_R = \{A_1, A_2, A_3\}$

משפט: יהא R יחס שקילות על A אזי

1. לכל $x, y \in A$ מתקיים $[x] = [y]$ או $[x] \cap [y] = \phi$ (כלומר מחלקות השקילות זרות)
2. $A = \bigcup_{[x] \in A/R} [x]$ כלומר (איחוד מחלקות השקילות תתן את כל A)

הערה: זה בדיוק אומר שמיחס שקילות ניתן להגיע לחלוקה של A

מסקנה: תהא A קבוצה אזי יש התאמה $\{R$ יחס שקילות על A $\} \leftrightarrow \{$חלוקות של A$\}$

חידוד: מהותו העיקרית של יחס שקילויות הוא לשים לב לשקילות מסוימת בין אברים שונים (כמו שיוויון) ולצמצם את החזרות המיותרות על ידי קיבוץ כל האיברים השקולים לקבוצה אחת.

תרגיל

במה יחסי שקילות שונים יש על $A = \{1,2,3\}$?

$\{\{1\}\ \{2\}\ \{3\}\} = A/R \qquad R = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\}$

$\{\{1\ 2\}\ \{3\}\}, \ \{\{1\ 3\}\ \{2\}\}, \ \{\{1,2,3\}\}$

$\{\{3,2\}, \{1\}\}$

בגלל שיש 5 חלוקות, יש 5 יחסי שקילות

תרגיל

תהי $A = \{1,2,3\}$ קבוצה. השלם את היחסים הבאים מעליה על מנת שיקיימו את התכונות הנדרשות בשאלה (השלם - כלומר הוסף זוגות סדורים **הכרחיים**):

- השלם את $R = \{(1,2)\}$ להיות יחס סימטרי וטרנזיטיבי. האם אחרי ההשלמה קיבלת יחס שקילות?
- השלם את הקבוצה הריקה ליחס שקילות. איך קוראים ליחס שקיבלת? מהן מחלקות השקילות?

$\{(1\ 2)\ (2\ 1)\ (1\ 1)\ (2\ 2)\} \rightarrow$ לא יחס"ש
כי לא רפלקטיבי
(חסר (3 3))

$\{(1\ 1)\ (2\ 2)\ (3\ 3)\} \rightarrow$ יחס השיוויון

$[1]_R = \{1\}, \ [2]_R = \{2\}, \ [3]_R = \{3\}$

תרגיל

$xTy \leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$

ראינו לעיל יחס $T\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ והראינו שהוא יחס שקילות. הוכיחו:

א. $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow[x]_T\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

ב. אם $x,y\in[0,1)$ שונים אז $[x]_T\neq[y]_T$.

ג. $\forall x\in\mathbb{R}\exists y\in[0,1):[x]_T=[y]_T$.

יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ נניח בשלילה שקיים $q\in\mathbb{Q}\cap[x]_T$, לכן קיים a

$\underset{\mathbb{Z}}{x-q=a} \longrightarrow x=a+q\in\mathbb{Q}$ $(\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q})$

בסתירה לכך שהנחנו $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

תרגיל

על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ נגדיר יחס $\sim$ לפי זה שלכל $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$:

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\iff x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$.

הוכיחו שזהו יחס שקילות (**חשוב להדגיש איך בודקים יחס שקילות על זוגות סדורים!!!**).
מהי, מבחינה גיאומטרית מחלקת השקילות של $(0,1)$? ומהי, מבחינה גיאומטרית, קבוצת המנה?

<u>פתרון:</u>

נוכיח רפלקסיבי:

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:(x,y)\sim(x,y)$

$x^2+y^2=x^2+y^2$ ✓

נוכיח סימטרי:

$(x,y)\sim(a,b)\longrightarrow x^2+y^2=a^2+b^2$

$a^2+b^2=x^2+y^2\longrightarrow(a,b)\sim(x,y)$

טרנזיטיבי:

$(x,y)\sim(a,b)$

$(a,b)\sim(c,d)$

צ"ל $(x,y)\sim(c,d)$

$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2=a^2+b^2\\a^2+b^2=c^2+d^2\end{matrix}\right\}x^2+y^2=a^2+b^2=c^2+d^2\longrightarrow(x,y)\sim(c,d)$$

שואלים מה: $[(0,1)]_\sim$?

$(x,y)\in[(0,1)]_\sim \longrightarrow x^2+y^2=1$

קיבלנו: מבחינה גאומטרית $[(0,1)]_\sim$ היא מעגל היחידה

קל לראות שקבוצת המנה הינה אוסף המעגלים הקנוניים בכל $r\in\mathbb{R}$.

תרגיל

תהא A קבוצה ותהא $S\subseteq A$ ת"ק שלה. נגדיר יחס $\sim$ על $P(A)$ ע"י הכלל

$$B_1\sim B_2 \iff B_1\cup S=B_2\cup S$$

- הוכיחו כי זהו יחס שקילות.
- עבור $A=\{1,2,\dots 10\}, S=\{1,7,9,10\}$ מצאו את מספר האיברים ב $P(A)/\sim$

<u>פתרון:</u>

(א) נוכיח יחס ש״ש

רפלקסיבי: יהי $B\in P(A)$ $B\cup S=B\cup S\longrightarrow B\sim B$

סימטרי: עבור מתקיים שוויון $\forall B_1,B_2\in P(A):(B_1,B_2)\in\sim\ \longrightarrow (B_2,B_1)\in\sim$

$B_1\cup S=B_2\cup S$

טרנזיטיבי: $(B_1,B_2),(B_2,B_3)\in\sim\ \longrightarrow B_1\cup S=B_2\cup S=B_3\cup S\longrightarrow B_1\sim B_3$

$C_1=\{8,5,1\}$ $C_2=\{8,5\}$ $C_3=\{8,5,7,9\}$ $C_4=\{8,5,1,10\}$

(ב) $A=\{1,\dots 10\}$ $S=\{1,7,9,10\}$

$B_1=\{2,1\}$ שים לב ש $B_1\sim B_2 \iff B_1\cup S=B_2\cup S$

$B_2=\{2,7,9\}$ אם הם שונים זה מזה אך ורק באיברים –

$B_3=\{2,7\}$ שייכים ל $S \iff B_1\Delta B_2\subseteq S$

מקבל מחלקה שלו

הדבר שמגדיר לנו את מחלקת השקילות האיברים ב $B_1,B_2\ni A\setminus S$

$A\setminus S=\{2,3,4,5,6,8\}$

נצטרך: למצוא כמה ת״ק יש ל $A\setminus S$.

בעצם צריך לשאול כמה איברים יש $P(A\setminus S)$

$=2^6$

שאלה ממבחן

א. תהי A קבוצה לא ריקה ותהי $\{R_i\}_{i\in I}$ משפחה של יחסי שקילות על A. הוכיחו כי החיתוך הכללי $R=\cap_{i\in I}R_i$ הינו יחס שקילויות על A.

ב. נסמן $R_n=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : n|(x-y)\}$. מהם $R_1, R_2, R=\cap_{n\in\mathbb{N}}R_n$? מהן קבוצות המנה $\mathbb{Z}/R, \mathbb{Z}/R_1, \mathbb{Z}/R_2$?

פתרון:

א) רפלקסיבי. צ"ל שלכל $a\in A$ $\quad aRa \Leftrightarrow (a,a)\in R$

$R=\bigcap_{i\in I}R_i$ בידוע שלכל i R_i הוא יחס שקילות

$$\forall i \quad (a,a)\in R_i \to (a,a)\in \bigcap_{i\in I} R_i = R$$

סימטרי:

$$(a,b)\in R \to (a,b)\in\bigcap_i R_i \to \forall_{i\in I}\,(a,b)\in R_i$$

(כל R_i יחס שקילות)

$$(b,a)\in R \leftarrow (b,a)\in\bigcap_{i\in I}R_i \leftarrow \forall_{i\in I}\,(b,a)\in R_i$$

טרנזיטיבי:

$$(a,b),(b,c)\in R=\bigcap_{i\in I}R_i \to \forall_{i\in I}\,(a,b),(b,c)\in R_i$$

$$(a,c)\in R \leftarrow (a,c)\in\bigcap_{i\in I}R_i \leftarrow \forall_i\,(a,c)\in R_i$$

ב) R_1 - כל הזוגות $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך שההפרש מתחלק ב-1
בעצם כל $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

R_2 כל הזוגות $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כך שההפרש מתחלק ב-2
כל הזוגות ש-x,y זוגיים או ש-x,y אי זוגיים שניהם

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_n$ - כל הזוגות x,y שההפרש מתחלק בכל מס' טבעי $\Leftarrow$ $(x,x)\ \forall x\in\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/R_1$: מכילה מחלקת שקילות אחת שהיא $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/R_2$: 2 מחלקות שקילות $\{odd, even\}$

$\mathbb{Z}/\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_n$: יחס השוויון. בהינתן $x\in\mathbb{Z}$ האיבר היחיד ששקול אליו הוא עצמו

$\{[0]\ [1]\ [-1][2]\ldots\}\quad \{[x]\ \forall x\in\mathbb{Z}\}$

יחסי סדר

הגדרה: יחס R על A נקרא **אנטי-סימטרי** אם מתקיים

$\forall x, y \in A : [(x,y) \in R] \wedge [(y,x) \in R] \rightarrow (x = y)$

כלומר, אם $x \neq y$ אז לא יכול להיות שמתקיים היחס בין x לבין y **וגם** היחס בין y לx.

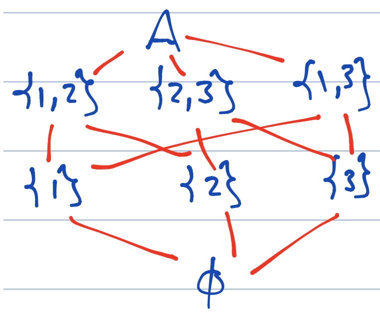
הגדרה: יחס R על A נקרא **יחס סדר חלקי** אם R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי

דוגמאות ליחסי סדר חלקי:

- היחס 'קטן-שווה' על המספרים
- היחס 'מוכל-שווה' על הקבוצות
- היחס 'מחלק את ' על הטבעיים

הגדרה. דיאגרמת הסה Hasse הינה דיאגרמה של יחס סדר חלקי על קבוצה. כל איבר המקושר לאיבר מתחתיו 'גדול' ממנו ביחס. נצייר את דיאגרמת הסה ליחס הכלה על קבוצת החזקה של הקבוצה $A = \{1,2,3\}$.

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, A\}$



הגדרה: יהי R יחס על A, אזי **היחס ההופכי** מוגדר להיות $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$

תרגיל

הוכח שאם R יחס סדר חלקי, גם ההופכי שלו יחס סדר חלקי

פתרון

נתחיל ברפלקסיביות

R יחס חלקי $\rightarrow \forall a \in A\ (a,a) \in R \rightarrow (a,a) \in R^{-1}$

טרנזיטיביות:

$(a,b), (b,c) \in R^{-1} \rightarrow (b,a), (c,b) \in R \xrightarrow[\text{טר'}]{R} (c,a) \in R \rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

אנטי סימטריות

$(a,b), (b,a) \in R^{-1} \rightarrow (b,a), (a,b) \in R \xrightarrow[\text{אנטי סימטרי}]{R} a = b$

איברים מיוחדים

הגדרות. יהיו A קבוצה וR יחס סדר חלקי על הקבוצה:

- איבר $x \in A$ נקרא **מינמלי** ביחס לR אם $\forall y \in A : (y,x) \in R \to y = x$. כלומר, אין איבר 'קטן' מx. לא חייב להתקיים ש-x ביחס כלשהו עם איבר כלשהו.
- איבר $x \in A$ נקרא **מקסימלי** ביחס לR אם $\forall y \in A : (x,y) \in R \to y = x$. כלומר, אין איבר 'גדול' מx. לא חייב להתקיים ש-x ביחס כלשהו עם איבר כלשהו.
- איבר $x \in A$ נקרא **איבר קטן ביותר/מינימום** ביחס לR אם $\forall y \in A : (x,y) \in R$. כלומר, x 'קטן' מכל האיברים. x חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקבוצה. (דוגמא: הקבוצה הריקה תחת יחס הכלה)
- איבר $x \in A$ נקרא **איבר גדול ביותר/מקסימום** ביחס לR אם $\forall y \in A : (y,x) \in R$. כלומר, x 'גדול' מכל האיברים. x חייב להיות ביחס עם כל האיברים בקבוצה. (דוגמא: הקבוצה B תחת יחס ההכלה על קבוצת החזקה של B)

מינוח/סימון: עבור קבוצה A נסמן לעיתים יחס סדר ב $\leq$. לא להתבלבל עם ה"קטן שווה" ה"רגיל"! אם A קבוצה ו $\leq$ יחס סדר עליה, נסמן $(A, \leq)$ ונקרא ל A קבוצה סדורה חלקית. עוד נאמר במקרה זה כי איבר x קטן שווה מאיבר y אם מתקיים $x \leq y$

הערה: קל להוכיח מתוך תכונת האנטי-סימטריות שאם קיים איבר מינימום הוא יחיד (למרות שהוא לא חייב להיות קיים), ונכון הדבר לגבי המקסימום.

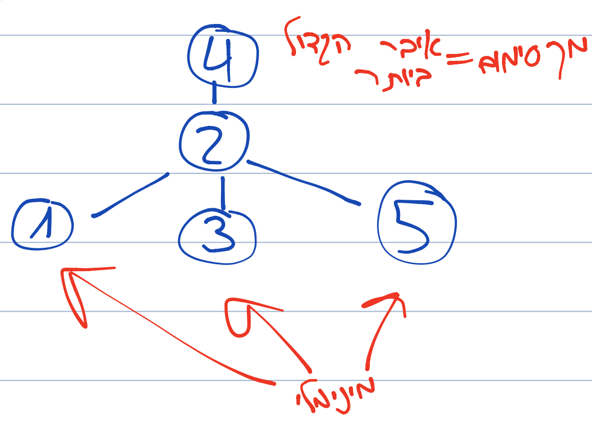
הערה: מינימום ← מינימלי, וכן מקסימום ← מקסימלי, ולא להיפך!

דוגמא:

נביט בקבוצה $A = \{1,2,3,4,5\}$ ונגדיר עליה יחס סדר חלקי:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,4),(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$$

(הזוגיים 'גדולים' מכל אי זוגיים ומהזוגיים הקטנים מהם)



תרגיל:

$(A,\leq)$ קבוצה סדורה. הוכיחו/הפריכו x מינימלי מחייב ← x איבר קטן ביותר.

אין סתירה. $A = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}\}$, $\leq$ ← הרגיל שאנחנו מכירים.