הנדסה מד"ר תשפג מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $(e^x+1)\,y'+1=-ye^x$ המקיים $y(0)=0$.

פתרון: המדר היא מסדר ראשון. נעביר אגפים $(e^x+1)\,y'+ye^x=-1$. נחלק ב e^x+1 לקבל

$$y'+y\frac{e^x}{(e^x+1)}=-\frac{1}{(e^x+1)}$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $y'+a(x)y=b(x)$ עבור $a(x)=\frac{e^x}{e^x+1}, b(x)=-\frac{1}{e^x+1}$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C+\int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x)$ קדומה של $a(x)$. נחשב $A(x)$:

$$A(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{dx}=\left\{\begin{array}{c}t=e^x\\ \mathrm{dt}=e^x\mathrm{dx}\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t+1}\mathrm{dt}=\ln\left(e^x+1\right)$$

ואז נציב

$$e^{-\ln(e^x+1)}\left(C-\int\frac{1}{e^x+1}e^{\ln(e^x+1)}\mathrm{dx}\right)=\frac{1}{e^x+1}\left(C-\int 1\mathrm{dx}\right)=$$

$$=\frac{C-x}{e^x+1}$$

ולכן, פתרון כללי הוא

$$y(x)=\frac{C-x}{e^x+1}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=0$ למצוא את הקבוע C.

$$0=y(0)=\frac{C}{1+1}$$

לכן $C=0$ והפתרון הוא

$$y(x)=\frac{-x}{e^x+1}$$

2. מצאו שני פתרונות למד"ר $\left(x+xy\right)y'=\frac{1}{2}$ המקיימים $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$.

פתרון: נוציא x:

$$\left(1+y\right)y'=\frac{1}{2}$$

ונחלק x ורשום בצורה שקולה

$$\left(1+y\right)\mathrm{dy}=\frac{\mathrm{dx}}{2x}$$

לקבל מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$y+\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

נעביר אגף ו

$$\frac{y^2}{2}+y-\frac{1}{2}\ln|x|+C=0$$

(C קבוע כל שהוא. לא אותו אחד ממקודם). לכן

$$y_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-4\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)}=-1\pm\sqrt{1+\ln|x|+C}$$

ויש שתי פתרונות (שמתאימים ל $\pm$). נציב תנאי התחלה $y\left(\frac{1}{e}\right)=-1$ בכל אחד לקבל פתרון פרטי. הראשון:

$$y_1(x)=-1+\sqrt{1+\ln|x|+C}$$

ואז

$$-1=y_1\left(\frac{1}{e}\right)=-1+\sqrt{1-1+C}$$

ולכן $\sqrt{C} = 0$. מכאן ש $C = 0$. הפתרון השני:

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x| + C}$$

ואז

$$-1 = y_2\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \sqrt{1 - 1 + C}$$

ולכן $C = 0$ כמו מקודם. לסיכום, שני הפתרונות הם:

$$y_1(x) = -1 + \sqrt{1 + \ln|x|}$$

$$y_2(x) = -1 - \sqrt{1 + \ln|x|}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = 2e^x$ המקיים $y(0) = 2, y'(0) = 5$.

פתרון: נתחיל עם פתרון כללי למד"ר הומוגנית $y'' - 2y' + y = 0$. הפולינום האופייני שלה

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

בעל שורש (כפול) 1 ולכן e^x, xe^x בסיס למרחב הפתרונות של ההומוגנית והפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית בעזרת שיטת הניחוש: כיוון ש $f(x) = 2e^x$ שהוא פולינום מדרגה 0 שמוכפל ב e^x (שמתאים ל 1 שהוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2), ננחש פתרון מהצורה $y_p = \alpha x^2 e^x$. מתקיים

$$y_p' = \alpha\left(x^2 + 2x\right)e^x$$
$$y_p'' = \alpha\left(x^2 + 4x + 2\right)e^x$$

ונציב במד"ר

$$\begin{aligned} 2e^x &= \alpha\left(x^2+4x+2\right)e^x - 2\alpha\left(x^2+2x\right)e^x + \alpha x^2 e^x \\ &= \left[\left(x^2+4x+2\right) - 2\left(x^2+2x\right) + x^2\right]\alpha e^x \\ &= 2\alpha e^x \end{aligned}$$

ונקבל $\alpha = 1$ והפתרון הפרטי

$$y_p = x^2 e^x$$

והפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית הוא

$$y = y_p + y_h = x^2e^x + C_1e^x + C_2xe^x$$

ו

$$y' = \left(x^2+2x\right)e^x + C_1e^x + C_2\left(x+1\right)e^x$$

ונציב תנאי התחלה. נציב ונקבל

$$2 = y(0) = C_1$$

$$5 = y'(0) = C_1 + C_2$$

ולכן $C_1 = 2$ ו $C_2 = 5 - C_1 = 3$. לסיכום:

$$.y = x^2e^x + 2e^x + 3xe^x$$

4. כדור בעל מסה $m = 2$ נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. הניחו כי קבוע הכבידה של כדור הארץ הוא $g = 10$ מטר לשנייה בריבוע.

(א) בהנחה שכוח המשיכה הוא הכוח היחיד הפועל על הכדור, חשבו את הזמן בו הכדור יגיע לשיא הגובה.

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$.

מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל על הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g = ma = a$$

או $g = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t) = -gt + c$$

ונציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבוע c. נתון כי $y'(0) = 20$ (המהירות ההתחלתית 20 כלפי מעלה שהוא הכיוון החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = -g \cdot 0 + c = c$$

ולכן $y'(t) = -gt + 20$. בגובה המקסימאלי, המהירות תתאפס, וזה קורה כאשר $y'(t) = 0$ או

$$gt = 20$$

כלומר לאחר $t = \frac{20}{g} = 2$ שניות.

(ב) בהנחה שבנוסף לכוח המשיכה, כוח התנגדות האוויר שווה בגודלו לחצי מגודל המהירות, מה תהיה מהירות הכדור ומה יהיה כיוונה לאחר שנייה אחת?

פתרון: נסמן מיקום הכדור ב 0 והכיוון כלפי מעלה הוא הכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן t (בפרט $y(0) = 0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg = 1 \cdot 10 = 10$ וכיוונו לכיוון השלילי (כלומר $-g$). בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $\frac{1}{2}v$ וכיוונו הפוך מהכיוון של v לכן הכח מהתנגדות האוויר הוא $-\frac{1}{2}v$. לכן הכח הכולל הוא $-g - \frac{1}{2}v$. מהשיוון $F = ma$ (כאשר F הוא הכח הפועל כל הכדור ו a היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g - \frac{1}{2}v = ma = a$$

או $-g - \frac{1}{2}y'(t) = y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z = y'$ ונקבל

$$z' + \frac{1}{2}z = -g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = \frac{1}{2}, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = \frac{1}{2}x$ ונציב

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - \int ge^{\frac{1}{2}x}\mathrm{dx}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C - 2ge^{\frac{1}{2}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

לכן:

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g$$

או

$$y'(t) = e^{-\frac{1}{2}x}C - 2g.$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ (מהירות התחלתית 20 כלפי מעלה שהוא החיובי) לכן

$$20 = y'(0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}C - 2g = C - 2g$$

ומכאן $C = 20 + 2g = 40$. קיבלנו $y'(t) = 40e^{-\frac{1}{2}x} - 2g$ והמהירות אחרי שניה המהירות תהיה

$$y'(1) = 40e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} - 2g = \frac{40}{\sqrt{e}} - 20 \approx 4.26$$

בכיוון החיובי (כלומר כלפי מעלה).

$$x = 2\ln(2)$$

5. יהי פרמטר חיובי $0 < a \in \mathbb{R}$ ונביט במד"ר $y' = y - 2axy^3$.

(א) עבור אילו ערכי a, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר המקיים $y(0) = 1$ וכן $y(1) = \frac{1}{2}$.

פתרון: נסדר מחדש לקבל

$$y' - y = -2axy^3$$

שזוהי משוואת ברנולי מהצורה $y' + p(x)y = q(x)y^n$ עם $n = 3$, $q(x) = -2ax$, $p(x) = -1$.
נציב $z = y^{1-n} = y^{-2}$ ונקבל את המשוואה

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$$

נכפיל ב $1-n$ ונקבל

$$z' + (1-n)\,p(x)z = (1-n)\,q(x)$$

או מפורשות

$$z' + (-2)\,(-z) = (-2)\,(-2ax)$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = 2, b(x) = 4ax$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x) = \int a(x)\mathrm{dx} = \int 2\mathrm{dx} = 2x$. נציב ונקבל

$$.z(t) = e^{-2x}\left(C + \int 4axe^{2x}\mathrm{dx}\right)$$

נחשב את האינטגל מימין ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int xe^{2x}\mathrm{dx} = \left\{\begin{array}{ccc} f = x & \Rightarrow & f' = 1 \\ g' = e^{2x} & & g = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right\} = x\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{dx} =$$

$$= x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2\cdot 2} = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ונקבל לסיכום:

$$z(t) = e^{-2x}\left(C + 4a\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = e^{-2x}C + a\,(2x-1)$$

$$.y = z^{\frac{1}{1-n}} = z^{\frac{1}{-2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{z}} = \pm\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}C + a\,(2x-1)}}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה $y(0) = 1, y(1) = \frac{1}{2}$ למצוא את C (ולבדוק אם יש פתרון):

$$\begin{cases} 1 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{C-a}} \\ \frac{1}{2} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e^{-2}C+a}} \end{cases}$$

והמשוואה הראשונה נקבל $\sqrt{C-a} = 1$ (ושצריך לקחת את הפתרון עם + בשורש) . נבודד את C ונגלה $C = a + 1$. נציב

במשוואה השניה:

$$\frac{1}{\sqrt{e^{-2}\left(a+1\right)+a}}=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\sqrt{e^{-2}\left(a+1\right)+a}=2$$

$$e^{-2}\left(a+1\right)+a=4$$

$$a\left(e^{-2}+1\right)=4-e^{-2}$$

$$a=\frac{4-e^{-2}}{e^{-2}+1}$$

ולכן עבור $0<\frac{4-e^{-2}}{e^{-2}+1}=a$ קיים פתרון

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}C+a\left(2x-1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}\left(a+1\right)+a\left(2x-1\right)}}.$$

כעת נראה שלכל a אחר אין פתרון. נשים לב שהפונקציה $F(x,y)=y-2axy^3$ רציפה וכן F_y בכל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ אז נוכל להסתכל על כל מלבן ולבחון את משפט היחידות על המד"ר שלנו $y'=F(x,y)$. נבחר את המלבן $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2},\left|y\right|\leq b$ (כאשר b יקבע אח"כ והתחום $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ מבטיח שקיימת y אחת ל $x=0$ ו $x=1$). לפי משפט היחידות: קיימת y יחידה בקטע $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq a'$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$ עבור

$$a'=\min\left\{ \frac{1}{2},\frac{b}{M}\right\}$$

כאשר M חסם של $\left|F(x,y)\right|$ במלבן. נחסום את M:

$$\left|F(x,y)\right|=\left|y-2axy^{3}\right|\leq\left|y\right|+2\left|a\right|\left|x\right|\left|y\right|^{3}\leq b+2\left|a\right|b^{3}$$

ולכן

$$\frac{b}{M}=\frac{1}{1+2\left|a\right|b^{2}}$$

ועבור a נתון נוכל למצוא b כך ש $\frac{b}{M}\geq\frac{1}{2}$. מכאן שנוכל להבטיח כי $a'=\min\left\{ \frac{1}{2},\frac{b}{M}\right\}=\frac{1}{2}$ וקיימת y יחידה בקטע $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ המקיימת $y'=y-2axy^{3}$ עם תנאי התחלה $y(0)=1$. כיוון שיש y יחידה אחת לכל $0\leq x\leq1$ אזי גם מצאנו את הערך ב $y(1)$

(שזה תנאי התחלה שני שנתון בשאלה). מכאן שכל החישובים שעשינו לעיל מראים שעבור $a \neq \frac{4-e^{-2}}{e^{-2}+1}$ לא קיים פתרון y (כי יש פתרון יחיד ומצאנו אותו אבל עבור $a \neq \frac{4-e^{-2}}{e^{-2}+1}$ שני המשוואות שמצאנו מביאות לסתירה).

(ב) עבור אילו ערכי a, אם בכלל, קיים פתרון למד"ר המקיים $y(0)=-1$ וכן $\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$.

פתרון: מצאו בסעיף קודם שפתרון המד"ר הוא

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}C+a\left(2x-1\right)}}.$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה $y(0)=-1$ למצוא את C :

$$-1=y(0)=-\frac{1}{\sqrt{C-a}}$$

ונקבל שצריך לקחת את הפתרון עם המינוס וכן ש $\sqrt{C-a}=1$. נבודד את C ונגלה $C=a+1$. לכן הפתרון גהוא

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}\left(a+1\right)+a\left(2x-1\right)}}. \\ &= -\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}\left[\left(a+1\right)+e^{2x}a\left(2x-1\right)\right]}} \\ &= -\frac{e^{x}}{\sqrt{\left(a+1\right)+e^{2x}a\left(2x-1\right)}} \end{aligned}$$

ונראה שלכל a מתקיים $\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$. נשתמש בלופיטל לחשב

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x}a\left(2x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a\left(2x-1\right)}{e^{-2x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2a}{-2e^{-2x}}=0$$

ולכן

$$-\frac{e^{x}}{\sqrt{\left(a+1\right)+e^{2x}a\left(2x-1\right)}}\xrightarrow{x\to-\infty}-\frac{0}{\sqrt{a+1+0}}=0$$

כנדרש.