9.1 פתרון מד"ר בעזרת טורי חזקות

אם במד"ר הליניארית $\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\left(x\right)y^{(k)}\left(x\right)=b\left(x\right)$ המקדמים $\alpha_k\left(x\right)$ אנליטיים בנ-קודה $x=x_0$, נחפש פתרון בצורה של טור חזקות סביב x_0:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

בד"כ הפיתוח יהיה סביב $x_0=0$ (סביב הראשית)

תרגילים

פתור בעזרת טורי חזקות סביב הראשית.

1. $y'-y=0$

המקדמים הם הפונקציות הקבועות ±1 וכמובן שהן אנליטיות בכל מקום.

$$\left[\begin{array}{c}1=1\cdot x^0+0x+0x^2+...\\ 1=1\left(x-x_0\right)^0+0\left(x-x_0\right)^1+0\left(x-x_0\right)^2+...\end{array}\right]$$

נחפש פתרון מהצורה $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ואז

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n$$

(הסבר: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-1\right)+1}=...+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}$)

רוצים $y'=y$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

לפי יחידות טור הטיילור:

$$\forall_{n=0,1,2,...}\left(n+1\right)a_{n+1}=a_n\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$$

נציב nים

$$n=0 \qquad a_1=\frac{a_0}{1}$$

$$n=1 \qquad a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{\frac{a_0}{1}}{2}=\frac{a_0}{1\cdot 2}$$

$$n=2 \qquad a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{\frac{a_0}{1\cdot 2}}{3}=\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$\forall n \qquad \boxed{a_n \stackrel{?}{=} \frac{a_0}{n!}}$$

$$\frac{a_0}{(n+1)!} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{a_0}{n!}}{(n+1)}=\frac{a_0}{n!\,(n+1)} \quad \surd$$

אם כך הפתרון הוא

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{n!}x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=a_0e^x=Ce^x$$

מה זה a_0? תנאי ההתחלה! $y\left(0\right)=a_0$. זה לא סתם! טיילור אומר

$$y\left(x\right)=y\left(0\right)+y'\left(0\right)x+\frac{y''\left(0\right)}{2!}x^2+...$$

2. משוואת Ainy - $y''=xy$

גם כאן המקדמים אנליטיים $(1,-x)$. נחפש פתרון בצורה:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}$$

ואז

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=...=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n$$

$$y''=\left(y'\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

רוצים $y'' = xy$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n+2}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$(0+2)(0+1) a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(a+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + 0x^0$$

נשאר

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$\forall_{n=0,1,2,\ldots} (n+3)(n+2) a_{n+3} = a_n$$

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$$

$$\begin{array}{ll}
n=0 & a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2} \\
n=1 & a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3} \\
n=2 & a_5 = 0 \\
n=3 & a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 4 \cdot a_0}{6!} \\
n=4 & a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5 \cdot a_1}{7!} \\
n=5 & a_8 = \frac{a_5}{\cdots} = 0 \\
n=6 & a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 4 \cdot a_0}{6! \cdot 8 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot a_0}{9!}
\end{array}$$

כבר אפשר לנחש

$$\begin{aligned}
a_{3k} &= \frac{a_0}{(3k)!} \prod_{j=k}^{k} (3j-2) \\
a_{3k+1} &= \frac{a_1}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1) \\
a_{3k+2} &= 0
\end{aligned}$$

פונקציית Γ (גמא)

בכדי לפשט את המקדמים נגדיר פונקציית Γ (גמא)
נתבונן בגרף הבא:

היינו רוצים דברים כמו $\left(\frac{3}{2}\right)!$ ($=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$). זה צריך להיות בין 1 ל2. התשובה לבעיה היא:

$$\Gamma\left(x\right):=\int_{0}^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

אפשר להראות <u>באינדוקציה</u> שמתקיים:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$$

למשל:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(1\right)&=0!=1\\ \Gamma\left(2\right)&=1!=1\\ \Gamma\left(3\right)&=2!=2\\ &\vdots\end{aligned}$$

מתברר שΓ מקיימת את הזהות $\Gamma\left(x+1\right)=x\Gamma\left(x\right)$ (כמו ש$x!=x\left(x-1\right)!$). ניתן להראות באינדוקציה על k

$$\prod_{j=1}^{k}\left(nj-m\right)=\frac{n^{k}\Gamma\left(k+\frac{n-m}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right)}$$

בחזרה לתרגיל

אם כך המקדמים הם

$$
\begin{aligned}
a_{3k} &= \frac{a_0}{(3k)!}\cdot\frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \\
a_{3k+1} &= \frac{a_1}{(3k+1)!}\cdot\frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
a_{3k+2} &= 0
\end{aligned}
$$

הפתרון הוא

$$
y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_0}{(3k)!}\cdot\frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot x^{3k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_1}{(3k+1)!}\cdot\frac{3^k\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}x^{3k+1}
$$

זהו הפתרון הכללי!

הגדרה

הפונקציה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$
\begin{cases}
y\left(0\right)=\dfrac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \\
y'\left(0\right)=-\dfrac{1}{3^{\frac{1}{e}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}
\end{cases}
$$

היא נקראת Ainy function ומסומנת $Ai\left(x\right)$

והפונקציה המקיימת את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} y\left(0\right)=\dfrac{1}{3^{1/6}\cdot\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)}\\ y'\left(0\right)=\dfrac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)} \end{cases}$$

נקראת Bainy function ומסומנת $Bi\left(x\right)$

תרגיל 3 - משוואת הרמיט(Hermite)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+c\cdot y=0$$

מתי קיים פתרון פולינומי?

פתרון

נחפש פתרון $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ואז

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}x^n\\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

נציב במד"ר

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2\left(n+1\right)a_{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}ca_nx^n\overset{!}{=}0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}cax^n=0$$

$$\Rightarrow\forall_{n=0,1,2,\ldots}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}-2na_n+ca_n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{\left(2n-c\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}a_n$$

אם $\boxed{c=2p}$ (זוגי)

$$\begin{aligned} a_{p+2} = & \frac{(2p-2p)}{(p+2)(p+1)}a_p & = 0 \\ a_{p+4=} & \qquad \cdots & = a_{p+3} = 0 \end{aligned}$$

מקבלים פתרונות פולינומים ממעלה p.

דוגמאות

$$\begin{aligned} p&=0 \qquad a_0x^0 = a_0 \\ p&=1 \qquad a_1x^1 \\ p&=2 \qquad a_0 + a_2x^2 \\ p&=3 \qquad a_1x + a_3x^3 \\ p&=4 \qquad a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 \end{aligned}$$

נהוג לקחת את המקדם של x^p להיות 2^p. נקבל:

$$\begin{aligned} p&=0 \qquad H_0(x) = 2^0 = 1 \\ p&=1 \qquad H_1(x) = 2x \\ p&=2 \qquad H_2(x) = a_0 + \frac{-4}{2\cdot 1}a_0x^2 \end{aligned}$$

ניקח $a_0 = -2$

$$\begin{aligned} p&=2 \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2 \\ p&=3 \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

הקשר בין משוואת אוילר למקדמים קבועים

דוגמה

$$x^2y'' + 7xy' + 58y = 0$$

נציב $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ ואז

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\right] = e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-t}\frac{d}{dt}\right] = \ldots$$