פתרון תרגיל בית מס' 9

21 בינואר 2013

1 מיון חבורות אבליות סופיות

יש לפתור את שאלות 1 ו־2, ולבחור שתים משאלות 3־5.

1. חשבו כמה חבורות אבליות שונות, עד כדי איזומורפיזם, יש מהסדרים הרשומים להלן. אין צורך לפרט את רשימת החבורות, אלא רק לחשב את מספרן.

פתרון: באופן כללי, נפרק את סדר החבורה למכפלת ראשוניים. לכל ראשוני נבדוק כמה חלוקות יש לחזקה שלו, ונכפיל את התוצאה. אם $n=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$, נסמן על ידי $p\left(n_i\right)$ את מספר החלוקות האפשריות של n_i, ואז מספר האפשרויות לחבורה מסדר n הוא $p\left(n_1\right)\cdots p\left(n_k\right)$.

(א) מסדר 100. $100=2^2\cdot 5^2$. מספר החלוקות של 2 הוא 2: $2=1+1$. לכן מספר האפשרויות הוא $p\left(2\right)\cdot p\left(2\right)=2\cdot 2=4$.

(ב) מסדר 1155. $1155=3\cdot 7\cdot 11$. אין כאן חזרה על אף גורם, ולכן יש רק אפשרות אחת.

(ג) מסדר 42875. $42875=5^3\cdot 7^3$. מספר החלוקות של 3 הוא 3: $3=1+2=1+1+1$. לאור זאת, מספר האפשרויות לחבורה אבלית מסדר זה היא $p\left(3\right)\cdot p\left(3\right)=9$. ■

2. מיינו את כל החבורות האבליות השונות, עד כדי איזומורפיזם, מהסדרים הרשומים להלן. כאן אתם מתבקשים לפרט את הרשימה.

(א) מסדר 270.

פתרון: נפרק את 270 לגורמים ראשוניים. $270=2\cdot 3^3\cdot 5$. לפי שאלה 1, יש 3 אפשרויות, לפי 3 החלוקות של 27. אם כן, האפשרויות הן

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{3^3}\times\mathbb{Z}_5\quad \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{3^2}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\quad \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$

אם נרצה לרשום את החבורות בכתיב של חבורות המתחלקות זו בזו, נרשום את האפשרויות האלו כך:

$$\mathbb{Z}_{270}\quad \mathbb{Z}_{90}\times\mathbb{Z}_3\quad \mathbb{Z}_{30}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$$

■

(ב) מסדר 9801.

פתרון: נפרק את 9801 לגורמים ראשוניים. $9801=3^4\cdot 11^2$. לפי שאלה 1, אנו צריכים לעסור על כל החלוקות של 4 ושל 2. ל־4 יש 5 חלוקות שונות: $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$. ל־2 יש 2 חלוקות. בסך הכל יש 10 אפשרויות. נעבור על כל האפשרויות.

$$\begin{array}{cc}
\mathbb{Z}_{81}\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{81}\times\mathbb{Z}_{121}\\
\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{121}\\
\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{121}\\
\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{121}\\
\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{121}
\end{array}$$

אם נרצה לרשום את החבורות בכתיב של חבורות המתחלקות זו בזו, נרשום את האפשרויות האלו כך:

$$\begin{array}{cc}
\mathbb{Z}_{891}\times\mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{9801}\\
\mathbb{Z}_{297}\times\mathbb{Z}_{33} & \mathbb{Z}_{3267}\times\mathbb{Z}_3\\
\mathbb{Z}_{99}\times\mathbb{Z}_{99} & \mathbb{Z}_{1089}\times\mathbb{Z}_9\\
\mathbb{Z}_{99}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_{1089}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\\
\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_{363}\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3
\end{array}$$

■

3. תהי G חבורה אבלית מסדר 72, אשר יש בה בדיוק 3 איברים מסדר 2 ויש 7 איברים או פחות מסדר 3. מצאו את G.

פתרון: לפי משפט סילו, ל־G יש חבורת 2־סילו וחבורת 3־סילו, דהיינו תת־חבורה מסדר 8 ותת־חבורה מסדר 9. נסמנן H_2 ו־H_3, בהתאמה. מכיוון שהחבורה G אבלית, היא מכפלה ישרה פנימית של חבורות סילו שבה, ומתקיים $G = H_2H_3 \cong H_2 \times H_3$. די לנו, לפיכך, למצוא את H_2 ואת H_3.

נפתח ב־H_3. האפשרויות ל־H_3, שהיא חבורה אבלית מסדר 9 הן: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}_9$. בחבורה $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ יש 8 איברים מסדר 3, למעלה מהמגבלה הנתונה. לכן האפשרות היחידה היא $H_3 \cong \mathbb{Z}_9$.

נביט כעת ב־H_2. האפשרויות ל־H_2, שהיא חבורה אבלית מסדר 8 הן: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ יש שבעה איברים מסדר 2, שהם יותר ממספר האיברים האלה ב־G כולה, ולכן $H_2 \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. בחבורה $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ יש 3 איברים מסדר 2, ובינתיים איננו יכולים לפסול אפשרות זו. בחבורה $\mathbb{Z}_8$ יש איבר יחיד מסדר 2.

על מנת להכריע בין שתי אפשרויות אלה, נבדוק כמה איברים מסדר 2 יהיו במכפלה הישרה H_2H_3 בכל אפשרות.

במכפלה פנימית של חבורות, כל איבר הוא מהצורה h_2h_3. החבורה G אבלית, לכן החזקה ה־i של ביטוי זה היא $h_2^ih_3^i$. מכיוון שהחיתוך $H_2 \cap H_3$ הוא טריוויאלי, איבר הוא מסדר i רק אם $h_2^i = h_3^i = e$. לכן, כדי שאיבר יהיה מסדר 2 הוא צריך לקיים $h_2^2 = h_3^2 = e$. אבל ב־H_3 יש רק איברים מסדר 1 או 3, ולכן $h_3^2 = e$ גורר $h_3 = e$. אם כן, כל האיברים ב־G מסדר 2 הם מהצורה $h_2e = h_2$.

מצאנו כאן כי כל האיברים מסדר 2 של G הם האיברים של חבורת 2־סילו שלה, H_2. לכן אנו מחפשים H_2 אחר שיש בה 3 איברים מסדר 2, והפתרון היחיד הוא $H_2 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

לסיכום, $G = H_2H_3 \cong H_2 \times H_3 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_2$. ■

4. מצאו מבין רשימת החבורות הבאה אילו חבורות איזומורפיות זו לזו.

פתרון: הכלל היסודי הוא שרק כאשר m ו־n זרים, מתקיים $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$. שיטת העבודה היא בהתאם לכלל זה: נביא כל חבורה לצורה המפורקת, בה כל גורם במכפלה הוא חבורה מסדר שהוא חזקת ראשוני. אם בצורה הזו כל הגורמים זהים אזי החבורות איזומורפיות.

(א) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$; $\mathbb{Z}_{36}$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18}$.

פתרון: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \not\cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{36}$. ■

(ב) $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2\cdot3^2}$; $\mathbb{Z}_{2\cdot3} \times \mathbb{Z}_{2^2\cdot3}$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2\cdot3^2}$; $\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{3^2}$.

פתרון: נפרק לגורמים ראשוניים, ונגלה $\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2\cdot3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2\cdot3^2}$. מנגד, ב־$\mathbb{Z}_{2\cdot3} \times \mathbb{Z}_{2^2\cdot3}$ משוכנת $\mathbb{Z}_3^2$ (בכל השאר אנו מוצאים את $\mathbb{Z}_9$ כחבורת 3־סילו). באופן דומה, ב־$\mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{3^2}$ משוכנת $\mathbb{Z}_8$, שאינה משוכנת בחבורות האחרות. לכן, לסיכום, רק$\mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2\cdot3^2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2\cdot3^2}$. ■

5. תהי $G = \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{42}$. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש ב־G.

פתרון: ראשית נחפש את תת־החבורה של איברים שסדרם מחלק את 2. נשמיט ממנה את האיבר היחיד שסדרו איננו 2 – היחידה – ונקבל את האיברים מסדר 2.

נגדיר את תת החבורה של האיברים שסדרם מחלק את 2 כך:

$$H = \{(a,b,c,d) \in G \mid (2a,2b,2c,2d) = 0\}$$

נרשום בצורה מסודרת את המשוואות הרשומות כאן:

$$\begin{array}{ll} 2a \equiv 0 \pmod{60} & 2b \equiv 0 \pmod{45} \\ 2c \equiv 0 \pmod{12} & 2d \equiv 0 \pmod{42} \end{array}$$

נפשט את המשוואות:

$$2a \mid 60 \quad 2b \mid 45 \quad 2c \mid 12 \quad 2d \mid 42$$

מכיוון ש־2 הוא ראשוני, אם הוא לא מחלק מספר, הוא זר לו. לכן 2 זר ל־45, ומכאן שאנו מחפשים $b \mid 45$. הפתרון היחיד למשוואה זו, מודולו 45, הוא כמובן $b = 0$. מנגד, לשאר המשוואות שני פתרונות: $a = 0, 30$, $c = 0, 6$, $d = 0, 21$.

לכן החבורה H היא החבורה

$$H = \left\{\begin{array}{cccc} (0,0,0,0) & (0,0,6,0) & (0,0,0,21) & (0,0,6,21) \\ (30,0,0,0) & (30,0,6,0) & (30,0,0,21) & (30,0,6,21) \end{array}\right\}$$

בחבורה זו 8 איברים, ומתוכם רק איבר אחד הוא מסדר 1. לכן בחבורה G, כמו בחבורה H, יש 7 איברים מסדר 2. ■

2 מכפלה פנימית ישרה

1. יהי F שדה, ותהי

$$G=\{(a_{ij})\in GL_n(F):\text{If } i>j \text{ then } a_{ij}=0, a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}\}$$

חבורת המטריצות המשולשיות עליונות מעל השדה F, אשר איברי האלכסון שלהן הם סקלר קבוע שאינו אפס. נסמן $D=\{\alpha\cdot I:\alpha\neq 0\}$ את חבורת המטריצות הסקלריות שאינן אפס, ונסמן U את חבורת המטריצות המשולשיות עליונות עם אלכסון של 1־ים.
הוכיחו כי $G\cong D\times U$.

פתרון: נראה כי $DU=G$ היא מכפלה פנימית ישרה, ולכן $G\cong D\times U$.

- $DU=G$. ההכלה $\subseteq$ היא טריוויאלית, כי כל חבורה בפני עצמה מוכלת גם היא ב־G. אם כן, אנו נראה רק את ההכלה בכיוון השני. תהי $A=(a_{ij})\in G$ נתונה. אזי ל־A יש איבר מסוים על האלכסון, שאינו 0. נסמנו α. אם כן, נסמן $B=\alpha I$ ו־$C=\alpha^{-1}A$. שימו לב שהסימון מוגדר היטב, כי $\alpha\neq 0$. ברור שמתקיים $A=BC$. השיוך $B\in D$ ברורה גם היא. נראה כי $C\in U$. נביט ב־C שכזו. A היא משולשית עליונה, ולכן גם הכפל בסקלר α^{-1} משאיר אותה משולשית עליונה. על האלכסון של C ניתן למצוא את האיברים $\alpha^{-1}a_{ii}$. מכיוון ש־A היא ב־G, אנו יודעים כי כל האיברים שעל האלכסון הם α, ולכן איברי האלכסון של C הם $\alpha^{-1}a_{ii}=\alpha^{-1}\alpha=1$. לסיכום מצאנו כי כל איברי האלכסון של C הם 1־ים, כמבוקש. מכאן נקבל $C\in U$. בסך־הכל מצאנו כאן כי לכל $A\in G$ קיים פירוק ב־DU, קרי $G\subseteq DU$. ביחד עם התחלת הסעיף נקבל את השוויון.
- $D\cap U=I$. כל האיברים ב־D הם מהצורה αI. אנו מחפשים את האיברים האלו שהם גם ב־U, ולכן האלכסון שלהם הוא 1־ים. הפתרון היחיד לזה הוא כמובן $\alpha=1$.
- $D\lhd G$. זה נכון כי $D\leq Z(G)$. כידוע, מטריצות סקלריות מתחלפות עם כל המטריצות, ובפרט עם אלו שב־G.
- $U\lhd G$. יהיו $A=(a_{ij})\in G,\ B=(b_{ij})\in U$. נביט בהצמדה ABA^{-1}. מכיוון שכל המטריצות משולשיות עליונות אז גם ההצמדה משולשית עליונה. איברי האלכסון של ההצמדה הם מכפלת איברי האלכסון של כל המטריצות, ולכן מתקיים $\left(ABA^{-1}\right)_{ii}=a_{ii}b_{ii}\left(a^{-1}\right)_{ii}=a_{ii}\cdot 1\cdot a_{ii}^{-1}=1$. מצאנו כאן כי כל איברי האלכסון הם 1־ים, ולכן $ABA^{-1}\in U$.

לסיכום, מצאנו כי המכפלה DU היא מכפלה פנימית ישרה, ולכן $G\cong D\times U$. ■

2. עבור G מהסעיפים להלן, מצאו האם ל־G יש תת־חבורות ממש H ו־K, כך שהמכפלה הפנימית HK היא ישרה ומתקיים $G=HK$.

(א) $G=\mathbb{Z}_4$.

פתרון: נחפש תת־חבורות ממש נורמליות של G. ל־G יש 3 תת־חבורות: $\mathbb{Z}_4,2\mathbb{Z}_4,4\mathbb{Z}_4$. שתיים מאלו אינן תת־חבורות ממש, $\mathbb{Z}_4,4\mathbb{Z}_4$. לכן האפשרות היחידה שלנו היא $H=K=2\mathbb{Z}_4$. אבל $2\mathbb{Z}_4\cdot 2\mathbb{Z}_4=2\mathbb{Z}_4\neq\mathbb{Z}_4$, ולכן לא ניתן להציג את G כמכפלה ישרה לא טריוויאלית. ■

(ב) $G=\mathbb{Z}_6$.

פתרון: בדומה לסעיף הקודם, נחפש תת־חבורות ממש נורמליות של G. ל־G יש 2 תת־חבורות ממש: $2\mathbb{Z}_6,3\mathbb{Z}_6$. החיתוך של חבורות אלו הוא $2\mathbb{Z}_6\cap 3\mathbb{Z}_6=\operatorname{lcm}(2,3)\mathbb{Z}_6=6\mathbb{Z}_6=\{0\}$. מנגד, $2\mathbb{Z}_6\cdot 3\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}_6$. מכיוון ש־$G$ אבלית, כל תת־החבורות הן נורמליות. לפיכך המכפלה $2\mathbb{Z}_6\cdot 3\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}_6$ היא מכפלה ישרה, ומתקיים $\mathbb{Z}_6\cong 2\mathbb{Z}_6\times 3\mathbb{Z}_6$. ■

(ג) $G=\mathbb{Z}$.

פתרון: נחפש תת־חבורות של G. כל תת־החבורות של G הן מהצורה $n\mathbb{Z}$. אנו מחפשים שתי תת־חבורות שחיתוכן טריוויאלי, $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=\{0\}$. אבל לכל $m,n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}=\operatorname{lcm}(m,n)\mathbb{Z}$, ולכן החיתוך טריוויאלי רק כאשר $\operatorname{lcm}(m,n)=0$, דהיינו כאשר m או n הם אפס. במקרה זה אנו עובדים עם תת־החבורה $0\mathbb{Z}=\{0\}$, שהיא תת־חבורה טריוויאלית, ובסתירה לדרישה לשתי תת־חבורות לא טריוויאליות. ■

(ד) $G=Q_8$.

פתרון: נעבור על התת־חבורות ממש של Q_8. ל־Q_8 יש ארבע תת־חבורות ממש: $\langle -1\rangle,\langle i\rangle,\langle j\rangle,\langle k\rangle$. בבדיקה ניתן לגלות כי אין עוד אפשרויות. ב־Q_8 כל התת־חבורות הן נורמליות (זו תוצאה של בדיקה שנערכה בפתרונות לתרגיל בית מס' 6 שאלה 9ג). אולם, כאשר נחפש שתי תת־חבורות שחיתוכן טריוויאלי נגלה שבכל התת־חבורות דלעיל נמצא את האיבר -1, ולכן החיתוך לעולם לא יהיה טריוויאלי. ■

(ה) $G=D_6$.

פתרון: בשיעור התרגיל הראנו כי $D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}_2$, בתור מכפלה חיצונית. לטובת הסטודנטים של קבוצה 03 שהשיעור הזה התבטל אצלם, להלן הפתרון המלא.
נסמן את הסיבוב ב־D_6 על ידי r ואת השיקוף על ידי s. נגדיר פונקציה $f : D_6 \to \mathbb{Z}_2$ על ידי $f\left(r^i s^j\right) = i \mod 2$. נשאיר כתרגיל להראות כי פונקציה זו מוגדרת היטב (דהיינו אם $r^i s^j = r^k s^l$ אז גם התמונה זהה). הפונקציה שומרת מבנה, כי

$$\begin{aligned} f\left(r^{i_1} s^{j_1} r^{i_2} s^{j_2}\right) &= f\left(r^{i_1} r^{(-1)^{j_1} i_1} s^{j_1} s^{j_2}\right) = \left(i_1 + (-1)^{j_1} i_2\right) \mod 2 \overset{\mathrm{mod}\ 2}{=} (i_1 + i_2) \mod 2 \\ &= i_1 \mod 2 + i_2 \mod 2 = f\left(r^{i_1} s^{j_1}\right) + f\left(r^{i_2} s^{j_2}\right) \end{aligned}$$

אם כן, f זו היא הומומורפיזם של חבורות, ולכן הגרעין שלה הוא תת־חבורה נורמלית. נחשב את הגרעין.

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{r^i s^j \in D_6 \colon f\left(r^i s^j\right) = 0\right\} = \left\{r^i s^j \in D_6 \colon i \mod 2 = 0\right\} \\ &= \left\{r^i s^j \in D_6 \colon 2 \mid i\right\} = \left\langle r^2, s\right\rangle \end{aligned}$$

אם כן קיבלנו כי $\left\langle r^2, s\right\rangle \lhd D_6$. נראה כי $\left\langle r^2, s\right\rangle \cong D_3$ בדרך גאומטרית. נניח שלושה מקודקדי משושה משוכלל על קודקדיו של משולש שווה־צלעות (=משוכלל). אזי כל סיבוב ב־D_3 מתאים ל־r^2, והשיקופים ב־D_3 ישקפו את המשושה איתם. ניתן להראות כי זהו איזומורפיזם $\left\langle r^2, s\right\rangle \cong D_3$.
המרכז של D_6 הוא, לפי תרגיל בית מס' 6 שאלה 8ג, החבורה $Z(D_6) = \left\{id, r^3\right\}$. חבורה זו היא נורמלית, כי היא המרכז. בשל סדרו של המרכז, ניתן לראות כי $Z(D_6) \cong \mathbb{Z}_2$.
החיתוך של שתי החבורות האלו הוא $\{id\} = \left\langle r^6\right\rangle = \left\langle r^{\mathrm{lcm}(2,3)}\right\rangle$, ומכפלתם היא $\left\langle r^3, r^2, s\right\rangle = \left\langle r^{\gcd(2,3)}, s\right\rangle = \langle r, s\rangle = D_6$.
לפי כל אלו, המכפלה $Z(D_6) \cdot \left\langle r^2, s\right\rangle$ היא ישרה, ומתקיים $D_6 = Z(D_6) \cdot \left\langle r^2, s\right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times D_3$. ■

תזכורת: תת־חבורה ממש של G היא תת־חבורה של G שאיננה החבורה הטריוויאלית ואיננה G בעצמה.

הדרכה: מכפלה פנימית היא ישרה רק אם היא מכפלה של תת־חבורות נורמליות. לכן חפשו תת־חבורות נורמליות של G, ובדקו האם מכפלתן היא ישרה ושווה ל־G.