מבנים אלגבריים - תירגול 0

12 במרץ 2019

הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר $t = \#\left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} :\ i<j, \sigma(j)<\sigma(i)\right\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1.
למשל עבור $\sigma = (1,2,3)$ מתקיים כי הזוג הסדור$(1,3)$ הוא היפוך סדר כי $1<3$ וגם $\sigma(3)<\sigma(1)$. גם הזוג הסדור$(2,3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $sgn(\sigma) = (-1)^2 = 1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.
משפט: תהא $\sigma \in S_n$ תמורה ויהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים אזי מתקיים

$$sgn(\sigma) = (-1)^m$$

[למשל את $\sigma = (1,2,3)$ ניתן להציג כ $(1,2)(2,3)$כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $sgn(\sigma) = (-1)^2$]
תרגיל: הוכיחו כי לכל $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ מתקיים כי $sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$.
פתרון: יהיו σ_1, σ_2 שתי תמורות. נציג אותם כמכפלה של חלופים

$$\sigma_1 = \tau_1 \cdots \tau_m$$
$$\sigma_2 = \tau_1' \cdots \tau_k'$$

אזי נקבל כי

$$\sigma_1\sigma_2 = \tau_1 \cdots \tau_m \tau_1' \cdots \tau_k'$$

ולכן

$$sgn(\sigma_1\sigma_2) = (-1)^{m+k} = (-1)^m (-1)^k = sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$$

הגדרות:

הגדרה: הזוג הסדור$(G,*)$ תקרא חבורה אם (G היא קבוצה, $*$ פעולה בינארית על G):

1. סגירות- $\forall a,b\in G: a*b\in G$
2. קיבוציות - $\forall g_1,g_2,g_3:\ (g_1*g_2)*g_3=g_1*(g_2*g_3)$
3. איבר יחידה - $\exists e\in G:\ \forall g\in G:\ g*e=e*g=g$
4. הופכי- $\forall g\in G\exists h:\ gh=hg=e$

מונאיד הוא חבורה בלי תנאי ההפוכי.
אגודה (חבורה למחצה) היא מונואיד ללא תנאי איבר יחידה
הגדרה: תהא $(G,*)$ מונואיד. ו $g,h\in G$. אם $gh=e$ אז gיקרא הפיך מימין ו h יקרא הפיך משמאלי.
אם g הוא הפיך מימין ומשמאל הוא יקרא הפיך דו"צ (בחבורה כל האיברים הם הפיכים דו"צ). ההופכי לו יסומן g^{-1}
הגדרה: תהא $(G,*)$ אגודה. אם קיים $e\in G$ כך ש $\forall g\in G:\ g*e=g$ הוא יקרא יחידה שמאלית. באותו אופן מגדירים יחידה ימנית ודו"צ.
הערה: יחידה דו"צ היא יחידה. ההופכי דו"צ הוא יחיד.

דוגמאות

1. $\mathbb{Z}_2$ עם חיבור מודולו 2
2. מטריצות $\mathbb{F}^{m\times n}$ עם חיבור הן חבורה חיבורית עם יחידה מטריצת האפס. ההופכי של A היא $-A$
3. $(\mathbb{N},\cdot)$מונואיד כפלי עם יחידה 1.
4. הקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עם הרכבת פונקציות היא מונויד עם איבר יחידה id. איברים הפיכים הם פונקציות הפיכות. לפונקציות חח"ע יש הפיכה שמאלית. לפונקציה על יש הפיכה ימנית.
5. בדומה, הקבוצה $S_n=\{f\in[n]^{[n]}: f \text{ is bijection}\}$ היא חבורה.
6. המטריצות $\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$ עם כפל היא מונואיד כפלי עם יחידה $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   יחידה שמאלית נוספות הן $\{\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}$. אין עוד יחידות ימניות.
7. הפולינומים $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ הן מונואיד. אין הפיך לפולינום מדרגה גדולה מאפס
8. הקבוצה $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\dots,n-1\}$ עם פעולת חיבור מודול n היא חבורה חיבורית עם יחידה 0. ההופכי של m הוא $n-m$
   הערה: הקבוצה $\{1,\dots,n-1\}$ עם פעולת כפל מודול n אינה בהכרח אגודה! למשל $\{1,2,3\}$ עם כפל מודולו 4 לא סוגרה: $2\cdot 2=0$.