בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ד סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר גיל אריאל, ד"ר סולומון וישקאוצן וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

<u>סעיף א (8 נקודות)</u>

נאמר שסדרה של מספרים ממשיים $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ היא מחזורית אם קיים $k\in\mathbb{N}$ קבוע כך ש $a_n = a_{n+k}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מצאו את עוצמת קבוצת כל הסדרות הממשיות המחזוריות.

<u>סעיף ב (15 נקודות)</u>

נגדיר $\sim$ יחס על קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ בצורה הבאה: עבור $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ מתקיים $a\sim b$ אם ורק אם $\frac{a}{b}$ הוא ריבוע ב $\mathbb{Q}$, כלומר $\frac{a}{b}=\frac{c^2}{d^2}$ עבור מספרים שלמים $c,\mathrm{d}\in\mathbb{Z}$ (שימו לב ש- a,b הם לא בהכרח מספרים שלמים).

i. הראו ש $\sim$ יחס שקילות

ii. מצאו את עוצמתה של מחלקת שקילות

iii. מצאו את עוצמתה של קבוצת המנה

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

יהי R יחס מעל קבוצה X. נגדיר את היחסים הבאים:

$$R_2 = \left\{(x,y)\in X^2 \mid \exists z\in X : xRz \wedge zRy\right\}$$

$$R^{-1} = \left\{(x,y)\in X^2 \mid yRx\right\}$$

$$I = \left\{(x,y)\in X^2 \mid x\in X\right\}$$

הוכח כי R הוא יחס סדר אמ"ם ($R^2 \subset R$ וגם $R\cap R^{-1} = I$).

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3 (23 נקודות)

הוכח את משפט המכפלה: אם X קבוצה אינסופית אז $|X \times X| = |X|$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

<u>סעיף א (12 נקודות)</u>

בהינתן קבוצה $A\neq\varnothing$,
נגדיר פונקציה $f:A\to P\left(P\left(A\right)\right)$ ע"י $f\left(a\right)=\left\{B \middle| B\subseteq A, a\in B\right\}$.
לדוגמא: אם $A=\{1,2\}$ אז $f\left(1\right)=\left\{\{1\},\{1,2\}\right\}$.
הוכח או הפרך:

i. f היא חד חד ערכית.

ii. f היא על.

<u>סעיף ב (11 נקודות)</u>

בהינתן קבוצה $A\neq\varnothing$,
נגדיר פונקציה $f:P\left(A\right)\to P\left(P\left(A\right)\right)$ ע"י $f\left(X\right)=\left\{B \middle| B\subseteq A, X\subseteq B\right\}$.
לדוגמא: אם $A=\{1,2,3\}$ אז $f\left(\{1,2\}\right)=\left\{\{1,2\},\{1,2,3\}\right\}$.

i. מצא את $f\left(\varnothing\right)$.

הוכח או הפרך:

ii. f היא חד חד ערכית.

iii. f היא על.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

יהי M קבוצה, $f:M\times M\to M$ פונקציה, במקום $f(x,y)$ נכתוב $x*y$.
נניח כי: לכל $x,y,z\in M$ $(x*y)*z=x*(y*z)$ וקיים איבר
$1\in M$ כך שלכל $x\in M$ $x*1=x$. תהיי $L\subseteq M$. נגדיר יחס $\approx$ מעל M ע"י:
לכל $x,y\in M$: $x\approx y\Leftrightarrow \forall v\in M(x*v\in L\leftrightarrow y*v\in L)$.

א. (8 נקודות) הוכיחו כי $\approx$ יחס שקילות מעל M.

ב. (7 נקודות) לכל $a\in M$ תהיי $[a]$ מחלקת השקילות של a לפי $\approx$. תהיי K קבוצת כל מחלקות השקילות של M לפי $\approx$. הוכיחו כי $g:K\times M\to K$ כך שלכך $x,z\in M$ $g([x],z)=[x*z]$ אכן פונקציה.

ג. (8 נקודות) הוכיחו כי אם $x\in L$ ו $y\approx x$ אז $y\in L$.