תרגיל כיתה 10 – משוואות מסדר ראשון

מתרגל: אדם צ'פמן

משפטי קיום ויחידות למשוואות עם תנאי התחלה:

משפט פיאנו

אם $f(x,y)$ רציפה וחסומה בתחום פתוח הכולל (x_0,y_0) אז קיים פיתרון למשוואה $y'=f(x,y)$ העובר בנקודה זו.

משפט פיקרד

אם $f(x,y)$ ו $\frac{d(f(x,y))}{dy}$ רציפות וחסומות בתחום פתוח הכולל (x_0,y_0) אזי קיים פיתרון יחיד למשוואה $y'=f(x,y)$ בתחום.

בפועל: אם נתונה משוואה $y'=f(x,y)$ ונקודה (x_0,y_0) אז כדי לבדוק אם קיים פיתרון יחיד אז בודקים אם (x_0,y_0) נמצאת בתחום ההגדרה של $f(x,y)$ וגם אם היא נמצאת בתחום ההגדרה של $\frac{d(f(x,y))}{dy}$. אם כן אז אכן יש פיתרון יחיד למשוואה העובר באותה הנקודה.

מאידך, אם נתונה משוואה בצורה $g(x,y)y'=h(x,y)$ ונקודה (x_0,y_0) אז לפני שמחלקים ב $g(x,y)$ ומקבלים $y'=\frac{h(x,y)}{g(x,y)}=f(x,y)$, צריך לבדוק האם

$g(x_0,y_0)=0$. אם כן אז אם $h(x_0,y_0)\neq 0$ אז אין פיתרון למשוואה. לעומת זאת, אם גם $h(x_0,y_0)=0$ אז ייתכן וקיים פיתרון למשוואה.

יותר מכך, אם לכל x, $h(x,y_0)=0$ אזי למשוואה $g(x,y)y'=h(x,y)$ יש תמיד פיתרון העובר בנקודה (x_0,y_0), והוא $y=y_0$.

דוגמאות:

- $(y-x)y'=y\ln(x)$. $(x_0,y_0)=(2,2)$, $(x_0,y_0)=(1,2)$

במקרה של $(x_0,y_0)=(2,2)$, אם מציבים במשוואה המקורית אז מקבלים $0=2\ln(2)$ וזו סתירה, ולכן לא קיים פיתרון שעובר בנקודה זו.

הנקודה $(x_0,y_0)=(1,2)$ לא מקיימת $g(x_0,y_0)=0$ ולכן נמשיך באופן הבא:

כשמבודדים את y' מקבלים $y'=\dfrac{y\ln(x)}{y-x}$.

תחום ההגדרה אם כן הוא $y-x\neq 0$ (בגלל המכנה) ו$x>0$ (בגלל $\ln(x)$).

$(x_0,y_0)=(1,2)$ נמצאת בתחום ההגדרה.

נגזור את $\dfrac{y\ln(x)}{y-x}$ לפי y ונקבל $\dfrac{-x\ln(x)}{(y-x)^2}=\dfrac{\ln(x)(y-x)-y\ln(x)}{(y-x)^2}$. תחום ההגדרה של הנגזרת זהה לתחום ההגדרה של $\dfrac{y\ln(x)}{y-x}$.

מכיוון ש$(x_0,y_0)=(1,2)$ נמצאת גם בתחום ההגדרה של הנגזרת, קיים פיתרון יחיד.

- $y'=2\sqrt{y}$.

תחום ההגדרה הוא $y \geq 0$. אם גוזרים את $2\sqrt{y}$ לפי y אז מקבלים $\frac{1}{\sqrt{y}}$. תחום ההגדרה פה הוא $y > 0$. כלומר, לכל נקודה (x_0, y_0) המקיימת $y_0 > 0$ קיים פיתרון יחיד למשוואה העובר בה. נקודות המקיימות $y_0 < 0$ הן בכלל מחוץ לתחום ההגדרה של $2\sqrt{y}$ ולכן אין עבורן פיתרון.

המקרה היחיד המעניין הוא $y_0 = 0$. אז הנקודה נמצאת בתחום ההגדרה של $2\sqrt{y}$ אך לא בתחום ההגדרה של $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

במקרה זה באמת ישנו יותר מפיתרון אחד, משום שגם $\sqrt{y} = x$ הוא פיתרון וגם $y' = 0$ הוא פיתרון.

- $xy' = y$

אם הנקודה (x_0, y_0) מקיימת $x_0 = 0$ אזי מהמשוואה מקבלים $y_0 = 0$, כלומר אם $y_0 \neq 0$. במקרה שגם $y_0 = 0$ נטפל תכף.

כעת מביטים ב $y' = \frac{y}{x}$, הנגזרת לפי y היא $\frac{1}{x}$ ופה תחום ההגדרה הוא $x \neq 0$.

כלומר לכל נקודה (x_0, y_0) המקיימת $x_0 \neq 0$ ישנו פיתרון יחיד.

לנקודה $(0,0)$ יש באמת את הפיתרון $y = 0$. בנוסף לפיתרון ישנם עוד אינסוף פיתרונות, כל פיתרון מהצורה $y = Dx$.

- מצאו ללא חישוב את כל הפיתרונות של $y' = y(y-1)$ העוברים בנקודה $(0,1)$.

הנקודה הזאת נמצאת בתחום ההגדרה של $y(y-1)$. הנגזרת היא $2y-1$, והנקודה $(0,1)$ נמצאת גם בתחום ההגדרה שלה. לכן ישנו פיתרון יחיד העובר בנקודה זו.

כעת, עבור $y=1$ צד ימין הוא אפס וגם צד שמאל הוא אפס, ולכן זה פיתרון, ואין פיתרון נוסף.