תורת הגרפים - הרצאה 5

27 בנובמבר 2011

משפט דיראק

יהי G גרף פשוט מסדר n.
אם $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ אז G המילטוניאן (ז.א יש בG מעגל המילטוני).

הערה חשובה

התנאי אינו הכרחי.
לדוגמהף מעגל C_n עבור $n \geq 5$ - $\delta(c_n) = 2 < \frac{n}{2}$. למרות זאת C_n המילטוניאן.

הוכחה

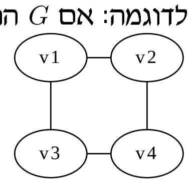
יהי G גרף מסדר n.
בה"כ, קבוצת קדקדיו היא $V = \{v_1, ..., v_n\}$.
לכל $k \geq 0$ נגדיר גרף G_k שקב' קדקדיו היא:

$$V(G_k) = V(G) \cup \{p_1, ..., p_k\} = \{v_1, .., v_n, p_1, ..., p_k\}$$

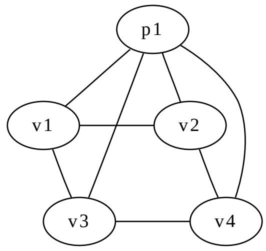
וקבוצת צלעותיו:

$$E(G_k) = E(G) \cup \left\{ (v_i, p_j) \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k \end{matrix} \right\}$$

לדוגמה: אם G הוא:



אז $G = G_0$ ואילו G_1 הוא:



עובדה

לכל גרף G מסדר n, G_n המילטוניאן, כי:

$$v_1 p_1 v_2 p_2 v_3 p_3 ... p_{n-1} v_n p_1 v_1$$

מעגל המילטוני.

המשך ההוכחה

יהי G גרף פשוט מסדר n עם $\delta\left(G\right)\geq\frac{n}{2}$.
לפי העבודה לעיל, G_{n} המילטוניאן. נסמן $k_{0}=\min\left\{ k\geq0\ :\ G_{k}\text{ is Hemiltonian}\right\}$.
לפי העובדה, $k_{0}\leq n$ לכן הוא קיים.
ברור, לפי ההגדרה, G המילטוניאן $\iff$ $k_{0}=0$.
נניח בשלילה ש$k_{0}>0$.
נשים לב:
סדר $G_{k_{0}}$ הוא $n+k_{0}$.
לכל קדקד $v_{i}\in V\left(G\right)$, $\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{i}\right)=\deg_{G}\left(v_{i}\right)+k_{0}\geq\frac{n}{2}+k_{0}$.
ב$G_{k_{0}}$ יש מעגל המילטוני.
מעגל זה עובר דרך p_{1}. הקדקד לפני p_{1} שייך ל$V\left(G\right)$.
הקדקד אחרי p_{1} שייך ל$V\left(G\right)$.
הקדקד לפני p_{1} במעגל שונה מהקדקד שאחריו במעגל (כי הוא המילטוני), בה"כ המעגל הוא:

$$v_{1}p_{1}v_{2}....v_{1}$$

יהיו $x,\,y$ שני קדקדים ב$G_{k_{0}}$ המופיעים בסמיכות במעגל, ז.א y מופיע מיד אחרי x.

טענת עזר

אם x שכן של v_{1} אז y אינו שכן של v_{2}.

הוכחה

נניח x שכן של v_{1} וy שכן של v_{2}, אז המעגל:

$$v_{1}x...v_{2}y...v_{1}$$

הוא מעגל המילטוני בלי שימוש בp_{1} (משתמשים במעגל שהגדרנו קודם), כלומר מעגל המילטוני ב$G_{k_{0}-1}$ ולכן $G_{k_{0}-1}$ המילטוניאן, סתירה למינימליות של k_{0}, מש"ל ט.ע.

מסקנה מטענת העזר

אחרי כל שכן של v_{1} מופיע "לא שכן" של v_{2}.
כלומר, יש התאמה חח"ע מתוך שכני v_{1} לתוך "לא שכני" v_{2}, מכאן מס' שכני $v_{1}\leq$ מס' "לא שכני" v_{2}.
הגרף $G_{k_{0}}$ פשוט, לכן מס' שכני v_{1} הוא $\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{1}\right)$.
מס' לא שכני v_{2} הוא $n+k_{0}-\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{2}\right)$.
קיבלנו:

$$\begin{aligned}n+k_{0}-\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{2}\right) & \geq\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{1}\right)\\
n+k_{0} & \geq\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{1}\right)+\deg_{G_{k_{0}}}\left(v_{2}\right)\\
 & \geq\frac{n}{2}+k_{0}+\frac{n}{2}+k_{0}\\
 & =n+2k_{0}
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}n+k_{0} & \geq n+2k_{0}\\
k_{0} & \leq0
\end{aligned}$$

וזו סתירה לכך ש$k_{0}>0$.

גרפים מישוריים

הגדרה

גרף $G=\left(V,\,E\right)$ ניתן לשיכון ב$\mathbb{R}^{d}$ (מרחב וקטורי d מימדי מעל $\mathbb{R}$) אם יש העתקה:

$$\varphi:\ V\left(G\right)\to\mathbb{R}^{d}$$

$\varphi:\ E\left(G\right)\to$ מסילות ב$\mathbb{R}^{d}$ שקצותיהן תמונות הקדקדים
(מסילות ב$\mathbb{R}^{d}$ = עקומות רציפות ללא חיתוך עצמי)
כך שכל תמונות שתי צלעות אינן חותכות זו את זה (אא"כ לצלעות קדקד משותף ואז נחתכות בקדקד זה).

דוגמאות

1. ניתן לשכן מסילה P_n ב$\mathbb{R}^1$. אין גרפים נוספים הניתנים לשיכון ב$\mathbb{R}^1$ (ללא חיתוך צלעות).

הערה

בקורס זה, סתם שיכון (לעתים נקרא לו שיכון טוב) הוא שיכון ללא חיתוך לא טריוויאלי של צלעות (חיתוך טריוויאלי = חיתוך בקדקד משותף).

תרגיל

כל גרף סופי (לאו דווקא פשוט) ניתן לשיכון (טוב) ב$\mathbb{R}^3$.

משפט

כל גרף סופי פשוט ניתן לשיכון ב$\mathbb{R}^3$ (ללא חיתוך לא טריוויאלי של צלעות) כך שכל צלעותיו קטעים של ישרים.

הוכחה

יהי G גרף פשוט מסדר n.
בה"כ:

$$V = \{v_1, ..., v_n\}$$

נגדר העתקה $\varphi : V(G) \to \mathbb{R}^3$ ע"י:

$$\varphi(v_i) = \left(i, i^2, i^3\right)$$

והצלעות יועתקו כדלקמן:

$$(v_i, v_j) \to [\varphi(v_i), \varphi(v_j)]$$

כאשר $[x, y]$ הקטע הישר בין x לy.
מכיוון ששני ישרים נחתכים בלכל היותר נק' אחת, ברור שלכל זוג צלעות עם קדקד משותף, החיתוך יהיה בקדקד המשותף בלבד.
לכן, מספיק להכיח שאם e_1, e_2 צלעות בG ללא קדקד משותף אז $\varphi(e_1) \cap \varphi(e_2) = \emptyset$.
תהיינה $(v_i, v_j), (v_k, v_m)$ צלעות זרות בG, ז"א, i, j, k, m רביעייה של מס' שונים בין 1 לn.

$$\begin{aligned}
\varphi(v_i, v_j) &= \{\varphi(v_i) + t(\varphi(v_j) - \varphi(v_i)) \ : \ 0 \le t \le 1\} \\
&= \{t\varphi(v_j) + (1-t)\varphi(v_i) \ : \ 0 \le t \le 1\} \\
\varphi(v_k, v_m) &= \{s\varphi(v_k) + (1-s)\varphi(v_m) \ : \ 0 \le s \le 1\}
\end{aligned}$$

מספיק להוכיח שלכל רביעייה של מס' שונים i, j, k, m מתקיים:

$$\{t\varphi(v_i) + t(\varphi(v_j) - \varphi(v_i)) \ : \ 0 \le t \le 1\} \cap \{s\varphi(v_j) + (1-t)\varphi(v_i) \ : \ 0 \le t \le 1\} = \emptyset$$

נוכיח על דרך השלילה. נניח שזה לא נכון, אז קיימים $t, s \in [0, 1]$ כך שמתקיים:

$$\begin{aligned}
t\varphi(v_i) + (1-t)\varphi(v_j) &= s\varphi(v_k) + (1-s)\varphi(v_m) \\
t\left(i, i^2, i^3\right) + (1-t)\left(j, j^2, j^3\right) &= s\left(k, k^2, k^3\right) + (1-s)\left(m, m^2, m^3\right) \\
t\left(1, i, i^2, i^3\right) + (1-t)\left(1, j, j^2, j^3\right) &= s\left(1, k, k^2, k^3\right) + (1-s)\left(1, m, m^2, m^3\right)
\end{aligned}$$

נעביר אגפים:

$$t\left(1, i, i^2, i^3\right) + (1-t)\left(1, j, j^2, j^3\right) - s\left(1, k, k^2, k^3\right) + (s-1)\left(1, m, m^2, m^3\right) = 0$$

באגף שמאל יש צ"ל ולא כל המקדמים הם 0 לכן יש לנו תלות לינארית בין הוקטורים:

$$\begin{gathered}
\left(1, i, i^2, i^3\right) \\
\left(1, j, j^2, j^3\right) \\
\left(1, k, k^2, k^3\right) \\
\left(1, m, m^2, m^3\right)
\end{gathered}$$

לכן המטריצה שאלו שורותיה היא סינגולרית, כלומר:

$$\begin{vmatrix} 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & j & j^2 & j^3 \\ 1 & k & k^2 & k^3 \\ 1 & m & m^2 & m^3 \end{vmatrix} = 0$$

אבל זו דטרמיננטת ון-דר-מונדה והיא שווה ל:

$$(i-j)(i-k)(i-m)(j-k)(j-m)(k-m)$$

מכפלה זו שווה ל0 $\iff$ יש בה גורם =0 כלומר שהרביעייה $i,\, j,\, k,\, m$ אינה של 4 מספרים שונים, בניגוד להנחה, סתירה.
לכן, המשפט נכון.

מכפלות קרטזיות של גרפים

הגדרה

בהינתן שני גרפים פשוטים $G,\, H$, המכפלה הקרטזית $G \times H$ היא הגרף שקב' קדקדיו היא:

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(u,\, v) \mid u \in V(G),\, v \in V(H)\}$$

וקב' צלעותיו:

$$E(G \times H) = \left\{ ((u_1,\, v_1),\, (u_2,\, v_2)) \;:\; \begin{array}{c} u_1 = u_2 \wedge (v_1,\, v_2) \in E(H) \\ \text{or} \\ (u_1,\, u_2) \in E(G) \wedge v_1 = v_2 \end{array} \right\}$$

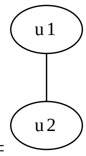
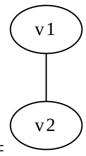
עובדה

$$\deg_{G \times H}(u,\, v) = \deg_G(u) + \deg_H(u)$$

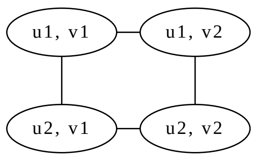
דוגמה

$$G = H = K_2$$

אזי:

$G =$  $,H =$ 

ואז $G \times H$ הוא:



לכן

$$K_2 \times K_2 \cong C_4$$

דוגמה נוספת

$$K_2^{x3} = K_2 \times K_2 \times K_2 \cong C_4 \times K_2$$

זו קוביה.

הגדרה

קוביה n-ממדית H_n היא גרף שקב' קדקדיו היא:

$$\{v \mid v \in \mathbb{Z}_2^n\}$$

כל הוקטורים במ"ו n-ממדי מעל $\mathbb{Z}_2$.
שני וקטורים שכנים אם נבדלים באיבר אחד בלבד.

הגדרה

הגרף הבולאני B_n הוא הגרף שקב' קדקדיו היא קבוצת כל תתי הקבוצות של $\{1, ..., n\}$.
שתי ת"ק A, B שכנות אם $A \subseteq B$ ו $|B| = |A| + 1$.

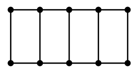
תרגיל

לכל n טבעי:

$$K_2^{xn} \cong H_n \cong B_n$$

דוגמאות נוספות למכפלות קרטזיות

$P_n \times P_2$ - גרף סולם. לדוגמה $P_5 \times P_2$:



$P_n \times P_n$ - שריג (grid).
$P_k \times C_m$ - גליל, צילינדר.
$C_m \times C_n$ - מעין טורוס. למשל, $C_3 \times C_3$: