פתרון המבחן בקישור הבא.

שאלה 1:

הוכיחו שלכל $x > 3$ מתקיים:

$$\frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

רעיון: נשתמש במשפט לגראנז' המוכלל (קושי) על שתי פונקציות בקטע מסויים.

$$f(x) = 2\ln(x-2)$$
$$g(x) = \sqrt{x+1}$$

בקטע

$$[3, x]$$

הפונקציות רציפות בקטע הסגור, גזירות בקטע הפתוח

כמו כן צריך לוודא שהנגזרת של $g(x)$ אינה מתאפסת בקטע הפתוח, ואכן $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \neq 0$

לכן לפי משפט קושי, קיימת נקודה $x > c > 3$ עבורה

$$\frac{f(x)-f(3)}{g(x)-g(3)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x-2}$$

נציב:

$$\frac{2\ln(x-2)-2\ln(3-2)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}} = \frac{\frac{2}{c-2}}{\frac{1}{2\sqrt{c+1}}}$$

נפשט

$$\frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{4\sqrt{c+1}}{c-2}$$

הרי אנחנו צריכים להוכיח כי

$$\frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

אבל

$$\frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{4\sqrt{c+1}}{c-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

כלומר רק צריך להוכיח כי

$$\frac{4\sqrt{c+1}}{c-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

כאשר ידוע ש $3 < c < x$

נבנה את הפונקציה

$$h(x) = \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

ואנחנו צריכים להוכיח שהיא מונוטונית יורדת (בתחום) כי אז כיוון ש $x > c$ ינבע ש $h(x) < h(c)$ וזה בדיוק מה שצריך להוכיח.

$$h'(x) = \frac{\frac{2(x-2)}{\sqrt{x+1}} - 4\sqrt{x+1}}{(x-2)^2} = \frac{\frac{2(x-2)-4(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{(x-2)^2} = \frac{-2x-8}{2\sqrt{x+1}(x-2)^2}$$

והנגזרת שלילית בכל התחום $[3,\infty)$ וסיימנו.

נסיון לפתור בדרך שנייה, כמו שארז לימד בכיתה:

צריך להוכיח שלכל $x > 3$ מתקיים כי

$$\frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

ננסה להעביר אגף ולבנות פונקציה, אם נסתבך שם, נחזור לפה ונעשה קודם כפל בהצלבה.

$$h(x) = \frac{2\ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} - \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

צ"ל שלכל $x > 3$ מתקיים כי $h(x) > 0$

נשים לב כי הפונקציה אינה מוגדרת ב$x = 3$, באינפי – כאשר אי אפשר להציב, מחשבים גבול.

אבל זה כבר מתחיל להיות חשוד, נעשה את הכפל בהצלבה.

כיוון ש $x > 3$ אז $x - 2 > 0$ וכן $\sqrt{x+1} - 2 > 0$

לכן אי השיוויון המקורי שצריך להוכיח מתקיים אם ורק אם

$$2(x-2)\ln(x-2) > 4\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)$$

נעביר אגף ונבנה פונקציה שצריך להוכיח שהיא חיובית לכל $x > 3$

$$h(x) = 2(x-2)\ln(x-2) - 4(x+1) + 8\sqrt{x+1}$$

נציב $x = 3$

$$h(3) = -16 + 16 = 0$$

אם נראה שהפונקציה עולה לכל $x \geq 3$, אז סיימנו.

$$h'(x) = 2\ln(x-2) + \frac{2(x-2)}{x-2} - 4 + \frac{4}{\sqrt{1+x}} = 2(\ln(x-2)-1) + \frac{4}{\sqrt{1+x}} = \frac{2(\ln(x-2)-1)\sqrt{1+x}+4}{\sqrt{1+x}}$$

אנחנו צריכים להוכיח שהמונה הוא חיובי בתחום.

$$t(x) = 2(\ln(x-2)-1)\sqrt{1+x}+4$$

כאשר $x-2>e$ כל הביטוי חיובי.

כאשר $3<x<e+2$

$$0 < \ln(x-2) < 1$$

$$-1 < \ln(x-2) - 1 < 0$$

ולכן

$$-2\sqrt{1+x} < 2(\ln(x-2)-1)\sqrt{1+x} < 0$$

ולכן

$$4-2\sqrt{1+x} < 2(\ln(x-2)-1)\sqrt{1+x}+4$$

מספיק להוכיח כי

$$4-2\sqrt{1+x} > 0$$

כלומר

$$2 > \sqrt{1+x}$$

ואכן, כיוון ש $x>3$ מתקיים כי

$$\sqrt{1+x} < \sqrt{1+3} = 2$$

שאלה 2:

א. (14 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך שהגבולות $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$ קיימים וסופיים. הוכיחו או הפריכו: f חסומה.

זה הוכחה, שאלה מספר 67 בקישור הבא.

ב. (13 נק') חשבו את גבולל הסדרה הבאה, המוגדרת ע"י כלל נסיגה, כאשר $a_1 > 0$: $a_{n+1} = a_n e^{a_n}$.

ראשית נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חיובית.

נתון כי $a_1 > 0$ ובהנתן $a_n > 0$ נובע כי $a_{n+1} = a_n e^{a_n} > 0$ (מכפלת חיוביים).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{a_n} \underbrace{\geq}_{a_n>0} 1$$

לכן סה"כ הסדרה מונוטונית עולה (היה מותר להשתמש בכך שהמנה גדולה מ1 כי מדובר בסדרה חיובית).

<u>אם</u> הסדרה חסומה מלעיל היא מתכנסת לגבול סופי נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n e^{a_n}$$

$$L = L \cdot e^L$$

$$L(1 - e^L) = 0$$

ולכן $L = 0$ או $e^L = 1$ כלומר $L = 0$

כלומר בכל מקרה $L = 0$

אבל (!) זה בלתי אפשרי כיוון שהסדרה עולה, $\lim a_n \geq a_1 > 0$

ולכן לא ייתכן שהסדרה חסומה כי מקבלים סתירה.

ולכן הסדרה עולה ואינה חסומה ולכן $a_n \to \infty$.

<u>שאלה 3:</u>

א. (14 נק') יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים עבורם: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. הוכיחו שאם $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

ב. (13 נק') קבעו האם הטור: $\sum \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ מתכנס. רמז: היעזרו בסעיף הקודם וזכרו ש: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

כבר פתרנו, תרגילים *5,6* ב[קישור הבא].

שאלה 4:

א. (13 נק') תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. הוכיחו שלכל 3 נקודות x_1,x_2,x_3 קיימת $c\in[a,b]$ כך ש: $f(c)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$.

ב. (14 נק') תהי f פונקציה גזירה בכל הממשיים, הוכיחו או הפריכו: f' חסומה בכל קטע סגור $[a,b]$.

סעיף ב': שאלה 52 מהקישור הבא.

סעיף א': בפתרון למבחן מתמטיקה מועד א' תשע"ג שאלה 5 בקישור הבא: *https://calc1.math-wiki.com*