

חשבון אינפי 1 למדמ"ח

שיעור 13: משפט הסנדוויץ', הגדרה רקורסיבית של סדרה, סדרות מונוטוניות, סדרות חסומות, גבולות חלקיים.

משפט הסנדוויץ':

תהיינה $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle, \langle c_n \rangle$ סדרות המקיימות:

א. החל מ- n מסוים $a_n \leq b_n \leq c_n$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

משפט הסנדוויץ' המוכלל: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ו- $b_n \geq a_n$ החל מ- n מסוים, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

תרגיל 1: חשבו את הגבולות הבאים :

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

פתרון: באיבר הכללי a_n של הסדרה יש n מחוברים כאשר המחובר הקטן ביותר הינו

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
 והמחובר הגדול ביותר הינו $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ולכן

$$\text{לכל } n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$
 ולכן לפי משפט הסנדוויץ'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$$

פתרון: $\frac{n^n}{n!} \geq \frac{n^n}{n^{n-1}} = n \rightarrow \infty$ ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$

תרגיל 2: השתמשו במשפט הסנדוויץ' על מנת להוכיח את הטענה הבאה :

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ וגם $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ולכן לפי משפט

הסנדוויץ' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ כדרוש.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת סדרה מונוטונית עולה אם $a_{n+1} \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת סדרה מונוטונית יורדת אם $a_{n+1} \leq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת חסומה אם קיים $M \geq 0$ ממשי כך ש- $|a_n| \leq M$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הגדרה: סדרה $\langle a_n \rangle$ נקראת חסומה אם לכל $H \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, a_H סופי.

משפט: סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

תרגיל 3: עבור הסדרות הבאות קבעו האם היא:

א. מונוטונית.

ב. חסומה.

ג. מתכנסת. אם הסדרה מתכנסת מצאו את גבול הסדרה.

$$1. \left\langle 2 - \frac{n-1}{10} \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

פתרון:

א. הסדרה מונוטונית יורדת, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$n \in \mathbb{N} \text{ לכל } a_{n+1} < a_n \text{ ולכן } a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{n}{10} - \left(2 - \frac{n-1}{10}\right) = -\frac{1}{10} < 0$$

ב. הסדרה אינה חסומה, כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n-1}{10}\right) = -\infty$.

ג. הסדרה מתבדרת למינוס אינסוף

$$2. \left\langle \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

פתרון:

א. הסדרה מונוטונית עולה, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$n \in \mathbb{N} \text{ לכל } a_{n+1} > a_n \text{ ולכן } a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}}\right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}\right) > 0$$

ב. הסדרה חסומה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{3}{5} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10}\right) = a_1 \leq a_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < \frac{2}{3}$

ולכן $|a_n| < \frac{2}{3}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ג. הסדרה מתכנסת ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3}$

$$3. \left\langle \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

פתרון:

א. הסדרה אינה מונוטונית, כי $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = \frac{2}{27}$ כלומר $a_1 > a_2$ ו- $a_2 < a_3$.

ב. הסדרה חסומה, כי $0 \leq \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \leq \frac{2}{n^3} \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן $|a_n| \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ג. הסדרה מתכנסת, כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} = 0$ (מספר סופי חלקי אינסופי)

תרגיל 4: הוכיחו, כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:

א. סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ לכל $n \geq 2$ טבעי

הוכחה:

נחש את גבול הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{2 + L}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

שימו לב: עדיין לא הוכחנו שהסדרה מתכנסת, אבל אחרי שנוכיח את ההתכנסות

נוכל להסיק ש- $L = 2$ הינו גבול הסדרה.

החישוב שעשינו לניחוש גבול הסדרה יעזור לנו לדעת מהו החסם של הסדרה.

במקרה שלנו החסם הינו 2, נותר רק להוכיח זאת.

נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ואז לפי משפט נוכל להסיק שהיא

מתכנסת.

$$. n \in \mathbb{N} \text{ לכל } a_n - a_{n-1} = \sqrt{2 + a_{n-1}} - a_{n-1} \geq 0$$

$$a_n - a_{n-1} = \sqrt{2 + a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{2 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{\sqrt{2 + a_{n-1}} + a_{n-1}} \geq 0$$

השוויון האחרון מתקיים אם ורק אם $2 + a_{n-1} - a_{n-1}^2 \geq 0$ אם ורק אם $-1 \leq a_{n-1} \leq 2$.

מכיוון ש- $a_{n-1} > 0$ לכל n נותר להראות ש- $a_{n-1} \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

נוכיח באינדוקציה על n .

בסיס האינדוקציה: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$

הנחת האינדוקציה: $a_{n-1} \leq 2$

נוכיח: $a_n \leq 2$

(המעבר הראשון לפי הגדרת הסדרה והמעבר השני לפי הנחת האינדוקציה).

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה ומקיימת $0 < a_n \leq 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן לפי משפט מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

ב. סדרה המוגדרת ע"י $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) \forall n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 < \beta \leq 1$.

הוכחה:

1. כמו בתרגיל הקודם ננחש קודם מהו גבול הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ נסמן}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\beta a_{n-1}^2 + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{2} \left(\beta L^2 + \frac{1}{\beta} \right)$$

נפתור את המשוואה $L = \frac{1}{2} \left(\beta L^2 + \frac{1}{\beta} \right)$ ביחס ל- L ונקבל $L = \frac{1}{\beta}$.

כמו שצינינו קודם אין זו הוכחה של קיום הגבול, אבל זה עוזר לנחש את החסם של הסדרה. במקרה שלנו זהו $\frac{1}{\beta}$.

2. נבדוק מונוטוניות

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) - a_n = \frac{\beta}{2} \left(a_n^2 - \frac{2a_n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) = \frac{\beta}{2} \left(a_n - \frac{1}{\beta} \right)^2 \geq 0$$

ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

3. נוכיח שהסדרה חסומה

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ ולכן הסדרה חסומה מלרע.}$$

נוכיח באינדוקציה על n ש- $a_n \leq \frac{1}{\beta} \forall n \in \mathbb{N}$

בסיס האינדוקציה: $a_1 = 1 \leq \frac{1}{\beta}$, כי לפי הנתון $0 < \beta \leq 1$.

הנחת האינדוקציה: $a_n \leq \frac{1}{\beta}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{נוכח}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\beta \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta}$$

האינדוקציה).

כלומר הוכחנו שהסדרה חסומה מלעיל ע"י $\frac{1}{\beta}$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\beta} \quad \text{לפי החישוב שעשינו קודם נוכל להסיק ש-}$$

הגדרה: $L \in \mathbb{R}$ נקרא **גבול חלקי** של הסדרה $\langle a_n \rangle$ אם קיימת תת סדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ כך ש-

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = L$$

משפט: סדרה מתכנסת אם ורק אם היא חסומה וכל הגבולות החלקיים שלה שווים ביניהם.

תרגיל 5: מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה הבאה:

$$\langle a_n \rangle = \left\langle (-1)^n \left(5 - \frac{3}{4n} \right) \right\rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

פתרון:

נתבונן בשתי תתי סדרה

$$\langle a_{2k} \rangle = \left\langle (-1)^{2k} \left(5 - \frac{3}{4 \cdot 2k} \right) \right\rangle_{k \in \mathbb{N}} = \left\langle \left(5 - \frac{3}{8k} \right) \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\langle a_{2k-1} \rangle = \left\langle (-1)^{2k-1} \left(5 - \frac{3}{4(2k-1)} \right) \right\rangle_{k \in \mathbb{N}} = \left\langle - \left(5 - \frac{3}{4(2k-1)} \right) \right\rangle_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -5 \quad \text{ו-} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 5$$

אלה הם הגבולות החלקיים היחידים, כי האינדקסים של תתי הסדרות מקיימים $\{2k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ ו- $\{2k | k \in \mathbb{N}\} \cap \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, כלומר האינדקסים של שתי תתי הסדרות מכסים את כל הטבעיים.

תרגיל 6: תהיינה $\langle a_n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle$ שתי סדרות נתונות. הוכיחו או הפריכו את הטענות

הבאות:

א. אם $\langle a_n b_n \rangle$ מתכנסת, אז $\langle a_n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle$ מתכנסות.

תשובה: לא נכון

דוגמא: $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$ ו- $\langle b_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$ סדרות מתבדרות, אבל

$$\langle a_n b_n \rangle = \langle (-1)^{2n} \rangle = \langle 1 \rangle.$$

ב. אם $\langle a_n \rangle$ סדרת מונוטונית, אזי $\langle a_n \rangle$ היא סדרת קושי.

תשובה: לא נכון

דוגמא נגדית: $\langle a_n \rangle = \langle n \rangle$ היא סדרה מונוטונית עולה, אבל זוהי לא סדרת קושי כי

עבור $H, K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ כך ש- $H > K$ נקבל $a_H - a_K = H - K$ ואם ניקח $H = 2K$ ונקבל

$$a_H - a_K = H - K = 2K - K = K$$

כלומר מצאנו שני אינדקסים אינסופיים H, K כך ש- $a_H \not\approx a_K$ ולכן הסדרה אינה סדרת קושי.

דוגמא נוספת: $\left\langle 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right\rangle$ היא סדרה מונוטונית עולה, כי

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

סדרת קושי, כי עבור $H, K \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ כך ש- $H > K$

$$a_H - a_K = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{H+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{K} \right) = \frac{1}{K+1} + \dots + \frac{1}{H+1} > \frac{H-K}{H+1}$$

המעבר לאי שוויון נכון, כי יש $H - K$ מחוברים בסכום כאשר הקטן ביותר מבין

$$\frac{1}{H+1} \text{ המחוברים הינו}$$

$$, a_{2K} - a_K > \frac{2K - K}{2K + 1} = \frac{K}{2K + 1} > \frac{K}{2K + K} = \frac{1}{3}$$

כלומר מצאנו שני אינדקסים אינסופיים H, K כך ש- $a_H \not\approx a_K$ ולכן הסדרה אינה

סדרת קושי.

ג. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

תשובה: לא נכון.

דוגמא נגדית: $\langle a_n \rangle = \langle n+1 \rangle$, $\langle b_n \rangle = \langle n \rangle$, אבל $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1 - n) = 1 \neq 0$$