מבוא לאנליזה מתקדמת - תרגול 6

3 בדצמבר 2020

1 פירוק הפולינומים

ראיתם את העובדה הבאה: אם $p(x)$ פולינום עם מקדמים ממשיים אז לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים: $p(\overline{z}) = 0 \iff p(z) = 0$ (כלומר, כל פולינום עם מקדמים ממשיים השורשים המרוכבים שלו באים בזוגות: $(z, \overline{z})$). ניתן להיעזר בזה כדי לפרק פולינום מדרגה כלשהי, למכפלה של פולינום מדרגות 1,2:

תרגיל: פרקו את הפולינום $p(x) = x^5 + 2$.

פתרון: לגבי פולינום זה, המשפט אומר שאם z מקיים: $z^5 + 2 = 0$, אז גם $\overline{z}$ מקיים זאת, כלומר: $\overline{z}^5 + 2 = 0$. מה עושים כדי לפרק?

1. מוצאים את כל השורשים.
2. ממיינים לזוגות של שורשים מרוכבים צמודים, ובנפרד כל השורשים הממשיים.
3. כל זוג שורשים צמודים נותן לנו גורם ריבועי כי עבור $a + bi$ שורש נקבל $(x - (a + bi))(x - (a - bi))$ וכשנפתח סוגריים נקבל רק מקדמים ממשיים:

$$(x-(a+bi))\cdot(x-(a-bi)) = x^2-ax+bix-ax+a^2-abi+-bix+abi+b^2 = x^2-2ax+a^2+b^2$$

נראה זאת בדוגמא. כלומר, מה הפתרונות של המשוואה

$$z^5 = -2 = 2\mathrm{cis}\pi$$

לכן נקבל

$$z = \sqrt[5]{2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right)$$

$$z_0 = \sqrt[5]{2}\mathrm{cis}\frac{\pi}{5}$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}\text{cis}\frac{3\pi}{5}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}\text{cis}\pi = -\sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{5}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{2}\text{cis}\frac{9\pi}{5}$$

כעת, אחרי שמצאנו את כל השורשים, וראינו מי הממשיים, צריך לחלק לזוגות צמודים. איך נדע מי הצמודים? הזויות משלימות ל־2π. לכן נקבל את הזוגות: $(z_0, z_4), (z_1, z_3)$.

ניעזר בזוגות כדי למצוא גורמים מדרגה 2:

$$(x - z_0)(x - z_4) = x^2 - z_4x - z_0x + z_0z_4 = x^2 - (z_0 + z_4)x + z_0z_4$$

כעת, בגלל שאנחנו יודעים ש־ $\overline{z_0} = z_4$, לכן נקבל: $z_0z_4 = z_0\overline{z_0} = |z_0|^2$. בנוסף, $z_0 + z_4 = z_0 + \overline{z_0} = 2Re(z_0)$. לכן נקבל:

$$(x - z_0)(x - z_4) = x^2 - 2Re(z_0)x + |z_0|^2 = x^2 - 2 \cdot \sqrt[5]{2}\cos\frac{\pi}{5}x + 2^{\frac{2}{5}}$$

בדומה, נמצא עבור הזוג (z_1, z_3):

$$(x - z_1)(x - z_3) = x^2 - (z_1 + z_3)x + z_1z_3$$

שוב, כיון ש־ $z_3 = \overline{z_1}$ נקבל:

$$= x^2 - (z_1 + \overline{z_1})x + z_1\overline{z_1} = x^2 - 2Re(z_1)x + |z_1|^2 =$$

$$x^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\frac{3\pi}{5}x + 2^{\frac{2}{5}}$$

לסיום נכתוב את הפולינום כמכפלת שלושת הגורמים שמצאנו:

$$x^5 + 2 = (x + \sqrt[5]{2})(x^2 - 2 \cdot \sqrt[5]{2}\cos\frac{\pi}{5}x + 2^{\frac{2}{5}})(x^2 - 2\sqrt[5]{2}\cos\frac{3\pi}{5}x + 2^{\frac{2}{5}})$$

2 נגזרות

נסתכל על פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ שמוגדרת בעזרת 2 פונקציות

$$f=U+iV$$

כאשר $U,V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. למשל:

$$f(x+yi)=xy^2-x^2y^2i$$

כאן $U(x,y)=xy^2, V(x,y)=-x^2y^2$.

אנחנו נעזרים במושג "נגזרות חלקיות" כדי לדבר בהמשך על גזירות של פונקציה מרוכבת.

מה זה נגזרות חלקיות? בהינתן פונקציה $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נגדיר נגזרת חלקית לפי x ע"י: לגזור את U כאשר x הוא המשתנה ומתייחסים ל־y כקבוע. מסמנים: U_x.

תרגילים:

1. מצאו נגזרות חלקיות לפי x,y של U,V בפונקציות המרוכבות הבאות:

(א) $f(x+yi)=xy^2-x^2y^2i$

כאן $U(x,y)=xy^2, V(x,y)=-x^2y^2$. לכן:

$$U_x=y^2$$

$$U_y=2yx$$

$$V_x=-2xy^2$$

$$V_y=-2x^2y$$

(ב) $f(z)=z\cdot Im(z)+Re(z)$

נעבור תחילה להגדרה לפי U,V: נסמן $z=x+yi$ ואז

$$z\cdot Im(z)=(x+yi)\cdot y=xy+y^2i, Re(z)=x$$

ולכן:

$$f(x+yi)=xy+x+y^2i$$

כלומר: $U(x,y)=xy+x, V(x,y)=y^2$. ועכשיו נגזרות חלקיות:

$$U_x=y+1$$

$$U_y = x$$

$$V_x = 0$$

$$V_y = 2y$$

2. בהינתן $U(x,y)$ פונקציה, נרצה לגזור פעמיים. נעשה זאת על הפונקציות מתרגיל קודם:

(א) $f(x+yi) = xy^2 - x^2y^2i$
כאן $U(x,y) = xy^2, V(x,y) = -x^2y^2$. לכן

$$U_x = y^2$$

$$U_y = 2yx$$

$$V_x = -2xy^2$$

$$V_y = -2x^2y$$

כעת נמצא:

$$U_{xx} = 0$$

$$U_{xy} = 2y$$

$$U_{yx} = 2y$$

$$U_{yy} = 2x$$

$$V_{xx} = -2y^2$$

$$V_{xy} = -4xy$$

$$V_{yx} = -4xy$$

$$V_{yy} = -2x^2$$

ב) $f(z) = z \cdot Im(z) + Re(z)$

נעבור תחילה להגדרה לפי U, V: נסמן $z = x + yi$ ואז

$$z \cdot Im(z) = (x + yi) \cdot y = xy + y^2 i, Re(z) = x$$

ולכן:

$$f(x + yi) = xy + x + y^2 i$$

כלומר: $U(x, y) = xy + x, V(x, y) = y^2$. ועכשיו נגזרות חלקיות:

$$U_x = y + 1$$

$$U_y = x$$

$$V_x = 0$$

$$V_y = 2y$$

ונקבל נגזרות חלקיות מסדר שני:

$$U_{xx} = 0$$

$$U_{xy} = 1$$

$$U_{yx} = 1$$

$$U_{yy} = 0$$

$$V_{xx} = V_{xy} = 0$$

$$V_{yx} = 0$$

$$V_{yy} = 2$$