תורת הקבוצות - תרגיל בית 10 - פתרון

1א) נסמן ב-B את קבוצת נקודות הסגור של A.

ראשית, נראה ש-B לא חסומה.

יהי $\alpha\in\omega_1$. A לא חסומה, לכן יש $A\ni\beta\geq\alpha$. A לא חסומה

לכן יש $A\ni\beta_1\geq\beta+1>\beta$, באופן דומה יש $A\ni\beta_2>\beta_1>\beta\geq\alpha$.

אפשר להגדיר ככה סדרה עולה $\{\beta_n\}\subseteq A$. אז $\beta'=\lim\beta_n\in B$ מהגדרת B.

וכן $\beta'>\alpha$.

כעת נראה ש-B סגורה. יהי $\{\beta_i\}\subseteq B$ סדרה עולה. כל β_i הוא נקודת

סגור, ולכן קיימת $\{\beta_{n}^{i}\}\subseteq A$

סדרה עולה.

המשך: נבנה סדרה ב-A שמתכנסת ל-$\lim\beta_i=\beta'$.

ניקח $\beta_1\leq\gamma_1\in A$ איבר כלשהו ב-A.

$\beta_1<\gamma_2\leq\beta_2$ ← קיים איבר כזה ב-A, כי β_2 הוא גבול של סדרה ב-A.

$\beta_n<\gamma_n\leq\beta_{n+1}$ איבר ב-A.

נטען: $\lim\gamma_n=\beta'$.

הוכחה: $\beta'=\lim\beta_n\leq\lim\gamma_n\leq\lim\beta_{n+1}=\beta'$

$\{\gamma_n\}\subseteq A$, ולכן β' הוא נקודת סגור של A, כלומר $\beta'\in B$.

ב. ראינו בתרגיל שפונקציות נורמליות מכילות נקודות שבת מכל גודל, ולכן

קבוצת נקודות השבת לא חסומה, כלומר, לכל $\alpha<\beta$ קיים $\alpha<\gamma\leq\beta$,

γ נקודת שבת.

נראה שקבוצת נקודות השבת סגורה.

תהי $\{\beta_i\}$ סדרה של נקודות שבת. כלומר, $f(\beta_i)=\beta_i$ לכל i.

אז: $f(\lim\beta_i)=\lim f(\beta_i)=\lim\beta_i$.

לכן $\lim\beta_i$ היא נקודת שבת.

המשך

ב' $f(\alpha)=\omega^\alpha$ היא פו' נורמלית לכן

$\{\alpha \mid \omega^\alpha=\alpha\}$ היא קבוצת נקודות השבת של פו' נורמלית, ולכן

מסעיף ב' לא סופית.

3 נסמן $cf(\alpha)=\lambda$

יש $g:\lambda\to\alpha$ קופינלית ושומרת סדר.

טענה: $f\circ g:\lambda\to f(\alpha)$ קופינלית

הוכחה: נאמר, נשים לב שבגלל f אינה חסומה מ-α ל-$f(\alpha)$,

כי לכל $\beta<\alpha$, $f(\beta)<f(\alpha)$.

כעת, יהי $\beta<f(\alpha)$.

$$f(\alpha)=f(\sup_{\gamma<\alpha}\gamma)=\sup_{\gamma<\alpha}f(\gamma)$$

לכן יש $\gamma<\alpha$ כך ש- $\beta<f(\gamma)$.

יש $\delta\in\lambda$ כך ש- $\gamma\le g(\delta) \Rightarrow \beta<f(\gamma)<f(g(\delta))$.

כלומר, $f\circ g:\lambda\to f(\alpha)$ היא קופינלית.

לכן, $cf(f(\alpha))\le cf(\alpha)$

מצד שני, נסמן $\lambda=cf(f(\alpha))$

יש $g:\lambda\to f(\alpha)$ קופינלית ושומרת סדר

~~β~~ נרצה למצוא פו' קופינלית $\lambda\to\alpha$

מכיוון ש- $f(\alpha)=\sup_{\beta<\alpha}f(\beta)$, לכל $\gamma<\lambda$ יש $\beta<\alpha$ כך ש-

$g(\gamma)<f(\beta)$. נגדיר פו' שמתאימה לכל γ את β הראשון כך ש- $g(\gamma)<f(\beta)$.

נראה פו' קופינלית: יהי $\beta<\alpha$, $f(\beta)<f(\alpha)$. אז יש $\gamma\in\lambda$

כך ש- $g(\gamma)>f(\beta)$. יש $\delta\in\alpha$ כך ש- $f(\delta)>g(\gamma)>f(\beta)$. לכן הראשון

שמקיים זאת הוא המתאים של γ, ובגלל ש-f שומרת סדר, $\delta>\beta$.

לכן, יש פו' $\lambda\to\alpha$ קופינלית

כלומר, $cf(\alpha)\le cf(f(\alpha))$

ומכאן $cf(\alpha)=cf(f(\alpha))$

2. נגדיר פו' חדשה: $g(\alpha)=\sup f_i(\alpha)$.

אז β נקודת סגר של g. כלומר, לכל $\gamma<\beta$, $g(\gamma)<\beta$.

כלומר, $\sup f_i(\gamma)<\beta \Leftarrow \forall i,\ f_i(\gamma)<\beta \Leftarrow$ β נקודת סגר של

f_i, לכל i. כלומר, $\beta\in\bigcap D_{f_i}$.

הראנו ש- $D_g\subseteq\bigcap D_{f_i}$.

3. הפרכה: כן, נסתכל על $A=\{\omega\}$. A לא סל"ח כי קבוצה חסומה.

$A^c=\omega_1\setminus\{\omega\}$ לא סל"ח כי היא לא סגור.

4. נסתכל על: $A_\alpha=\omega_1\setminus\alpha$:$\forall\alpha$. לכל A_α היא סל"ח,

אבל $\bigcap_{\alpha\in\omega_1}A_\alpha=\phi$, לא סל"ח.

5. ראינו שלכל $\alpha<\beta$, $\beta\setminus\alpha$ היא סל"ח ב α. לכן קבוצה

שהיא נחתכת באופן לא ריק עם $\beta\setminus\alpha$ לכל $\alpha\in\beta$. כלומר, יש

בה איבר $\geq\beta$ לכל $\alpha\in\beta$. וזאת בדיוק ההגדרה של קופינליות.