אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 4

1. לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in U$ נגדיר את התנודה של f בכדור $B(x,\varepsilon)$ ע"י $\omega(x,\varepsilon) := \sup\left\{\rho\left(f(s), f(t)\right) : t,s \in B(x,\varepsilon)\right\}$, ונקודתית ע"י $\omega(x) := \inf\limits_{\varepsilon>0} \omega(x,\varepsilon)$. אנו טוענים שלכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $E_\alpha := \left\{x \in U : \omega(x) < \alpha\right\}$ היא פתוחה.

<u>הוכחת הטענה:</u>

יהי $x_0 \in E_\alpha$. ישנו $\varepsilon_0 > 0$, עבורו $\omega(x_0,\varepsilon_0) = \sup\left\{\rho\left(f(s), f(t)\right) : s,t \in B(x_0,\varepsilon_0)\right\} < \alpha$
(אחרת $\omega(x_0)$, שהוא ה-inf של כל המספרים $\omega(x,\varepsilon)$ לא יהיה קטן מ- α)

לכן, לכל $x \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ מתקיים

$$\omega\left(x, \frac{\varepsilon_0}{2}\right) = \sup\left\{\rho\left(f(s), f(t)\right) : s,t \in B\left(x, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right\} \le \sup\left\{\rho\left(f(s), f(t)\right) : s,t \in B(x_0,\varepsilon_0)\right\} = \omega(x_0,\varepsilon_0) < \alpha$$

ניקח inf להסיק שאם $x \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ אזי $\omega(x) < a$. כלומר אם $x \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ אזי $x \in E_\alpha$, ובמונחים של הכלה $B\left(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \subseteq E_\alpha$. מכאן ש- E_α פתוחה.

באינפי' מוכיחים (?) f רציפה בנקודה x $\Leftrightarrow$ $\omega(x) = 0$, ולכן לסיום:

$$\left\{x \in U : f \text{ is continuous at x}\right\} = \left\{x \in U : \omega(x) = 0\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in U : \omega(x) < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$$

$E_{1/n}$ פתוחות (ע"פ הטענה), ולכן קבוצת נקודות הרציפות של f באמת מטיפוס G_δ .

2.

א. נגדיר סדרת פונקציות פשוטות $f_n(x) = n \cdot I_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)$ $f_n \to 0$ נקודתית בקטע.

$\int\limits_{[0,1]} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n dm = \int\limits_{[0,1]} \lim\limits_{n\to\infty} f_n dm = \int\limits_{[0,1]} 0 dm = 0$. מצד שני לכל n,

$\int\limits_{[0,1]} f_n dm = n \cdot m\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = 1$ ולכן $\liminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n dm = \liminf\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

ב. לא. סדרת האינדיקטורים $f_n = I_{(n,\infty)}$ יורדת בממ"ח $(\mathbb{R}, L, m)$ ומתקיים:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n dm = \int\limits_{\mathbb{R}} 0 dm = 0 \text{ ולכל } n \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f_n dm = m\left((n,\infty)\right) = \infty \Leftarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n dm = \infty$$

.3

א. ניתן לרשום את הגבול כך $\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x\left(1+x^2\right)}I_{(0,n)}(x)dm(x)$. נוכיח כי סדרת הפונקציות

$f_n(x):=\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x\left(1+x^2\right)}I_{(0,n)}(x)$ מקיימות את תנאי משפט ההתכנסות המונוטונית:

- הן מדידות.
- הן אי שליליות.
- הסדרה עולה: לכל n ולכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים $f_n(x)\le f_{n+1}(x)$

ובכן:

- הן מדידות ככפל בין פונקציות מדידות ורציפות
- $\sin$ אי שלילית בקטע $(0,1)$ ולכן $f_n\ge 0$
- נחלק לשלושה מקרים:

1. $x\ge n+1$: ויש להוכיח $0\le 0$ (שני האינדיקטורים מתאפסים).
2. $n\le x<n+1$ ויש להוכיח $0\le f_{n+1}$. זה נכון כי הפונקציות א"ש
3. $0<x<n$ ויש להוכיח $\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x\left(1+x^2\right)}\le\frac{(n+1)\sin\frac{x}{n+1}}{x\left(1+x^2\right)}$ (שני האינדיקטורים נותנים 1)

שקול: $n\sin\frac{x}{n}$ עולה עם n . לצורך כך נוכיח שהנגזרת לפי n היא אי שלילית.

$\frac{\partial}{\partial n}\left[n\sin\frac{x}{n}\right]=\sin\frac{x}{n}-\frac{x}{n}\cos\frac{x}{n}\ge 0$. כלומר מספיק להוכיח $\tan\frac{x}{n}\ge\frac{x}{n}$ וזה נכון כי

$\frac{x}{n}\in[0,1]$.

ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)}\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x\left(1+x^2\right)}I_{(0,n)}(x)dm(x)=\int_{(0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x\left(1+x^2\right)}I_{(0,n)}(x)dm(x)=\int_{(0,\infty)}\frac{1}{1+x^2}dm(x)=\arctan x\Big|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\pi}{2}$$

ב. תחום האינטגרציה הוא $0<x<1$ ולכן נשתמש בפיתוח לטור הנדסי

$$\int_0^1\frac{x^p}{x-1}\log x\,dm(x)=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+p}(-\log x)dm(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 x^{k+p}(-\log x)dm(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}$$

החילוף בין הטור לאינטגרל בוצע על סמך משפט ההתכנסות המונוטונית בגרסה של טורי פונקציות אי שליליות (ראינו בהרצאה). כמו כן בחישוב האינטגרל השתמשי באינטגרציה לפי חלקים.