אלגוריתם למציאת המטריצה ההופכית - נשים את מטריצת היחידה I מימין ל־A. נדרג את A קנונית וכל פעולה שנבצע על A נבצע גם על I. כשנסיים ־ בצד שמאל תופיע I ובצד ימין תופיע A^{-1} .

<u>לדוגמה:</u>

מצאו את המטריצה ההופכית של:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נשים את A מול I ונדרג קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבצע: $R_2 - 3R_1 \to R_2$,$\frac{1}{2}R_3 \to R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

נבצע: $\frac{1}{3}R_2 \to R_2$,$R_1 - R_3 \to R_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

הגענו ל־I בצד שמאל, ולכן בצד ימין נמצאת המטריצה ההופכית:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>מרחבים וקטוריים:</u>

כפל מטריצות, הוא לא הפעולה הכי נחמדה שאפשר להגדיר...אם "נסתפק"

בחיבור מטריצות וכפל בסקלר, מה אפשר לומר על המבנה שנקבל? זה לא שדה, פעולת הכפל בשדה מכפילה שני איברים מהשדה זה בזה, בעוד שפעולת הכפל בסקלר מכפילה איבר מהקבוצה בסקלר שלא נמצא בקבוצה. מה כן נקבל? המבנה שנקבל נקרא **מרחב וקטורי.**

מרחבב וקטורי הוא קבוצה V מעל שדה $\mathbb{F}$ – כשאנו אומרים "מעל שדה" הכוונה היא שהסקלרים נלקחים מהשדה. איברי מרחב וקטורי נקראים "וקטורים".

מרחבים וקטוריים נפוצים:

1. וקטורים עם n רכיבים:

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|x_i \in \mathbb{F}\}$$

מעל השדה $\mathbb{F}$; הפעולות הן:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

אנחנו מכירים מבית הספר את $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. איבר האפס הוא: $(0, \ldots, 0)$.

2. מטריצות מגודל $m \times n$: $\mathbb{F}^{m\times n}$, מעל השדה $\mathbb{F}$ עם הפעולות ה"רגילות" של חיבור מטריצות וכפל בסקלר. איבר האפס הוא מטריצת האפס (מטריצה שכולה אפסים).

<u>תכונות שמתקיימות בכל מרחב וקטורי:</u>

א. $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$ (אם נכפיל וקטור בסקלר ה־0 נקבל את וקטור האפס).

ב. $\alpha \cdot v = 0_V$, אז: $\alpha = 0_{\mathbb{F}}$ או $v = 0_V$.

ג. $(-1_{\mathbb{F}}) \cdot v = -v$.

נמשיך בדוגמאות למרחבים וקטוריים.

3. פולינומים. פולינום הוא פונקציה מהצורה:

$$p\,(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

למשל:

$$x^2+5x, x^4+2x-1, 3x^3+5x^2-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$$

המעלה/דרגה של פולינום היא החזקה הגבוהה ביותר של x בפולינום שלא מתאפסת (המעריך). למשל, הפולינום x^2+5x ממעלה 2.
$a_n,\ldots,a_0$ נקראים מקדמי הפולינום. a_0 נקרא המקדם החופשי.
נסמן ב־$\mathbb{F}\left[x\right]$ את קבוצת כל הפולינומים שהמקדמים שלהם שייכים לשדה $\mathbb{F}$.
כמו כן, נסמן: ב־$\mathbb{F}_n\left[x\right]$ את קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים מהשדה $\mathbb{F}$ שהמעלה שלהם היא לכל היותר n. למשל:

$$\mathbb{R}_3\left[x\right]=\left\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0|a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\right\}$$

הפעולות הן:

$$\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)+\left(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0\right)=$$

$$\left(a_n+b_n\right)x^n+\ldots+\left(a_1+b_1\right)x+a_0+b_0$$

למשל:

$$\left(x^2+5x\right)+\left(2x^2-x+7\right)=3x^2+4x+7$$

וכפל בסקלר:

$$\alpha\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)=\alpha a_nx^n+\alpha a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha a_1x+\alpha a_0$$

עם הפעולות האלו, הקבוצות $\mathbb{F}\left[x\right],\mathbb{F}_n\left[x\right]$ הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.

4. אם במקום $\mathbb{F}$ לוקחים שדה אחר, $\mathbb{G}$ שמוכל ב־$\mathbb{F}$, אז הקבוצות $\mathbb{F}^{m\times n},\mathbb{F}^n,\mathbb{F}\left[x\right],\mathbb{F}_n\left[x\right]$ כולן מרחבים וקטוריים גם מעל השדה $\mathbb{G}$ ה"קטן יותר". למשל, $\mathbb{R}_3\left[x\right]$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ הוא שדה שמוכל ב־$\mathbb{R}$).
ההיפך הוא לא נכון – אם V הוא מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$\mathbb{G}$ שדה שמכיל את $\mathbb{F}$ ("גדול יותר"), V לא בהכרח מרחב וקטורי גם מעל $\mathbb{G}$. למשל:

$$\mathbb{R}^2=\left\{\left(x,y\right)|x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

$\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי גם מעל $\mathbb{Q}$. לעומת זאת, $\mathbb{R}^2$ אינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, כי אין סגירות לכפל בסקלר, למשל: $i \in \mathbb{C}, (1,0) \in \mathbb{R}^2$ אך: $i \cdot (1,0) = (i,0) \notin \mathbb{R}^2$.

<u>הערה:</u>
למה זה נקרא מרחב וקטורי? למה אנחנו קוראים לאיברים "וקטורים"? אנחנו יכולים "לתרגם" גם מטריצות וגם פולינומים לוקטורים "אמיתיים", למשל באופן הבא:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \mapsto (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$$

מכיוון שכך, יש היגיון מסוים בלקרוא לכל איברי מרחב וקטורי "וקטורים", גם אם הם לא וקטורים "אורגינל"...יתרה מזאת, אפשר לשים לב שפעולות החיבור והכפל בסקלר של פולינומים/מטריצות הן אותן הפעולות של הוקטורים ה"אמיתיים"...למשל:

$$\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\right) + \left(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0\right) =$$

$$= (a_n + b_n)\, x^n + \ldots + (a_1 + b_1)\, x + a_0 + b_0$$

$$\downarrow$$

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) + (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0) = (a_n + b_n, a_{n-1} + b_{n-1}, \ldots, a_1 + b_1, a_0 + b_0)$$

<u>תת־מרחב וקטורי:</u>
נתחיל מדוגמה – נתבונן ב־3 תתי־קבוצות של $V = \mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \{(x,0)\,|x \in \mathbb{R}\}$$

$$U_2 = \{(x,y)\,|x,y \geq 0\}$$

$$U_3 = \{(x,y)\,|x,y \geq 0\} \cup \{(x,y)\,|x,y \leq 0\}$$

עם הפעולות ה"רגילות" של חיבור וכפל בסקלר, האם U_1 הוא מרחב וקטורי? מה לגבי U_2, U_3?

U_2 לא מרחב וקטורי, למשל תכונות הנגדי והסגירות לכפל בסקלר לא מתקיימות: $-1 \in \mathbb{R}, (1,1) \in U_2$ אך:

$$-1 \cdot (1,1) = (-1,-1) \notin U_2$$

U_3 לא מרחב וקטורי, תכונת הסגירות לחיבור לא מתקיימת, למשל: $(3,2), (-5,-1) \in U_3$, אך:

$$(3,2) + (-5,-1) = (-2,1) \notin U_3$$

U_1 הוא כן מרחב וקטורי עם הפעולות ה"רגילות" של $\mathbb{R}^2$. האם נצטרך לעבור על כל התכונות של מרחב וקטורי ולהראות אחת־אחת שהן מתקיימות? נשמע ארוך...

ננסח את הדברים יפה. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $U \subseteq V$. אם U גם היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, U נקראת תת־מרחב וקטורי של V, ונסמן: $U \leq V$. כדי לבדוק שתת־קבוצה U היא אכן תת־מרחב וקטורי, לא צריך לבדוק את כל התכונות, מספיק לבדוק שני דברים - הקריטריון המקוצר.

<u>הקריטריון המקוצר לתת־מרחב וקטורי:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $U \subseteq V$. U היא תת־מרחב וקטורי של V, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. $0_V \in U$.

ב. לכל $u_1, u_2 \in U$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים: $\alpha u_1 + u_2 \in U$.

למשל, נוכיח ש: $U_1 = \{(x,0)\,|x \in \mathbb{R}\}$ אכן תת־מרחב וקטורי של $V = \mathbb{R}^2$. נראה ששני התנאים של הקריטריון המקוצר מתקיימים.

א. איבר האפס של V הוא: $0_V = (0,0)$, והוא אכן שייך ל־U_1.

ב. יהיו $u_1,u_2\in U_1$ ו־$\alpha\in\mathbb{R}$, צ"ל: $\alpha u_1+u_2\in U_1$. אם כן, מכיוון ש: $u_1,u_2\in U_1$ קיימים $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$u_1=(x_1,0)\,,\;u_2=(x_2,0)$$

ולכן:

$$\alpha u_1+u_2=\alpha\left(x_1,0\right)+\left(x_2,0\right)=\left(\alpha x_1+x_2,0\right)\in U_1$$

כנדרש. סה"כ, $U_1\le V$.

*ראשי תיבות – מרחב וקטורי=מ"ו, תת־מרחב וקטורי=תת־מ"ו־תמ"ו.

<u>ודוגמאות נוספות:</u>

1. $V=\mathbb{F}^{n\times n}$, $U=\left\{A\in V|A^t=A\right\}$. U היא קבוצת כל המטריצות הסימטריות מסדר n. נראה ש־U היא תת־מרחב וקטורי. נשתמש בקריטריון המקוצר – נראה ששתי התכונות הנדרשות אכן מתקיימות.

א. מטריצת האפס, 0, היא אכן סימטרית: $0^t=0$ ולכן: $0\in U$.

ב. תהיינה $A_1,A_2\in U$ ו־$\alpha\in\mathbb{F}$. צ"ל: $\alpha A_1+A_2\in U$. כלומר, נתון ש: $A_1^t=A_1,A_2^t=A_2$ וצ"ל: $\left(\alpha A_1+A_2\right)^t=\alpha A_1+A_2$. אם כן:

$$\left(\alpha A_1+A_2\right)^t=\left(\alpha A_1\right)^t+A_2^t=\alpha A^t+A_2^t=\alpha A_1+A_2$$

כנדרש.

בנוסף, קבוצת המטריצות האנטי־סימטריות: $U_1=\left\{A\in V|A^t=-A\right\}$ היא תת־מ"ו; הקבוצה: $U_2=\left\{A\in V|tr\left(A\right)=0\right\}$ היא תת־מ"ו.

מצד שני, את קבוצת המטריצות ההפיכות ב־V נסמן: $GL_n\left(\mathbb{F}\right)$, היא אינה תת־מרחב וקטורי כי אין בה איבר נייטרלי לחיבור, אין סגירות לחיבור, למשל:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

גם קבוצת המטריצות הלא־הפיכות היא לא תת־מרחב וקטורי.

2. במרחב $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$, נתבונן בקבוצה: $U=\left\{p\left(x\right)\in V|p\left(1\right)=p'\left(1\right)\right\}$.

U תת־מ"ו, לפני שנוכיח זאת נרשום את U באופן אחר. $p(x)\in V$, אפשר לרשום: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, ואז:

$$p(1)=a+b+c+d$$

$$p'(x)=3ax^2+2bx+c\Longrightarrow p'(1)=3a+2b+c$$

ולכן:

$$U=\{p(x)\in V|p(1)=p'(1)\}=\left\{ax^3+bx^2+cx+d|a+b+c+d=3a+2b+c\right\}$$

$$=\left\{ax^3+bx^2+cx+d|2a+b-d=0\right\}$$

אם כן, הקבוצה U מוגדרת כאוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית. נשים לב שגם את המרחבים בדוגמה הראשונה יכולנו להציג כך. לא נראה ישירות ש־U הוא תת־מ"ו, אלא הרבה יותר מזה – נראה שלא משנה מהו V, כל קבוצה שהיא אוסף פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות הומוגנית היא תת־מרחב וקטורי. נראה זאת בסעיף הבא.

3. V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $U=\{v\in V|Av=0\}$ עבור A מטריצה כלשהי (ראינו שכל מערכת משוואות ליניאריות אפשר לתאר כ:$Av=b$, ואצלנו המערכת הומוגנית). נוכיח ש־U הוא תת־מ"ו, לפי הקריטריון המקוצר.

א. ראשית, $A\cdot 0=0$ ואכן 0 מקיים את התנאי של U; $0\in U$.

ב. שנית, יהיו $u_1,u_2\in U$ ו־$\alpha\in\mathbb{F}$, צ"ל: $\alpha u_1+u_2\in U$. כלומר, נתון: $Au_1=Au_2=0$, צ"ל: $A(\alpha u_1+u_2)=0$. אם כן:

$$A(\alpha u_1+u_2)=\alpha Au_1+Au_2=\alpha\cdot 0+0=0$$

כנדרש. המרחב U נקרא **מרחב האפס** של A ומסומן: $N(A)$.

שימו לב – אם המערכת לא הומוגנית, זה לא תת־מרחב וקטורי.

4. בכל תת־מרחב וקטורי V, שתי הקבוצות: $V\subseteq V$, $\{0_V\}$ (המרחב כולו, אפס בלבד) הן תמיד תתי־מרחבים של V; הן נקראות תתי־מרחבים טריוויאליים.

חיתוך של תתי־מרחבים:

V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $U_1, U_2 \leq V$ תתי־מ"ו. איך משפיעות הפעולות על קבוצות על המרחבים? כלומר, האם גם:

$$U_1 \cap U_2, U_1 \cup U_2, U_1 \backslash U_2, U_1 \Delta U_2, U_1^C$$

תתי־מ"ו?

חוץ מחיתוך, התשובה היא לא.

במשלים, הפרש סימטרי והפרש איבר האפס לא נמצא.

באיחוד, נתבונן בדוגמה הבאה:

$$V = \mathbb{R}^2, U_1 = \{(x,0) \,|x \in \mathbb{R}\}, U_2 = \{(0,y) \,|y \in \mathbb{R}\}$$

האיחוד $U_1 \cup U_2$ הוא לא תת־מרחב וקטורי, כי אין סגירות לחיבור. למשל: $(1,0), (0,1) \in U_1 \cup U_2$ אך $(1,1) \notin U_1 \cup U_2$.

אפשר לשאול מתי איחוד הוא כן תת־מרחב? תכף נשאל ונענה.

החיתוך הוא כן תת־מרחב וקטורי, נוכיח זאת באמצעות הקריטריון המקוצר.

א. מכיוון ש־U_1, U_2 תתי־מ"ו, $0 \in U_1 \wedge 0 \in U_2$ ולכן – לפי הגדרת חיתוך – נקבל שאכן: $0 \in U_1 \cap U_2$.

ב. יהיו $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$, וסקלר $\alpha \in \mathbb{F}$, צ"ל: $\alpha u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$.

אם כן, $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$ ולכן, מצד אחד, $u_1, u_2 \in U_1$, U_1 הוא תת־מ"ו ולכן: $\alpha u_1 + u_2 \in U_1$. מצד שני, $u_1, u_2 \in U_2$, U_2 הוא תת־מ"ו ולכן: $\alpha u_1 + u_2 \in U_2$. מכאן – לפי הגדרת חיתוך – נקבל שאכן: $\alpha u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$, כנדרש.

החיתוך $U_1 \cap U_2$ הוא תת־מ"ו שמוכל ב־ U_1, U_2. יתר על כן, החיתוך הוא תת־המרחב הגדול ביותר שמוכל בU_1, U_2; כלומר, אם W הוא תת־מרחב המקיים: $W \subseteq U_1, U_2$ אז בהכרח: $W \subseteq U_1 \cap U_2$. זה נכון גם לקבוצות – הקבוצה הכי גדולה שמוכלת בU_1, U_2 היא החיתוך שלהם.

גם חיתוך של יותר משני תתי־מרחבים הוא תת־מרחב.

נחזור לשאלה שלנו – מתי איחוד של תתי־מרחבים הוא כן תת־מרחב?

<u>טענה:</u>
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U_1, U_2 \leq V$ תתי־מרחבים. אזי, $U_1 \cup U_2$ הוא תת־מרחב אם ורק אם $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$.
כלומר, האיחוד הוא תת־מרחב רק כאשר אחד מתתי־המרחבים מכיל את השני.
<u>הוכחה:</u>
$\underline{\Rightarrow}$: נתון: $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$ וצ"ל: $U_1 \cup U_2$ תת־מרחב.
אם $U_1 \subseteq U_2$ אז: $U_1 \cup U_2 = U_2$ והוא אכן תת־מרחב. באופן דומה כאשר $U_2 \subseteq U_1$.
$\Leftarrow$: נתון ש־$U_1 \cup U_2$ תת־מרחב, וצ"ל: $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$. נניח בשלילה שהמרחבים לא מכילים אחד את השני - קיימים u_1, u_2 כך ש: $u_1 \in U_1 \backslash U_2$ וגם: $u_2 \in U_2 \backslash U_1$. כעת, נתבונן בוקטור: $u_1 + u_2$. מכיוון ש: $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$, גם $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$ כי האיחוד הוא תת־מרחב ובפרט סגור לחיבור. מהגדרת איחוד, נקבל ש: $u_1 + u_2 \in U_1 \vee u_1 + u_2 \in U_2$.
מקרה אחד - $u_1 + u_2 \in U_1$ (המקרה השני, $u_1 + u_2 \in U_2$, דומה). U_1 הוא תת־מרחב, $u_1 \in U_1$ ולכן גם $-u_1 \in U_1$ (U_1 תת־מרחב ולכל איבר בו יש נגדי). מפה לשם, $u_1 + u_2, -u_1 \in U_1$ ולכן: $-u_1 + u_1 + u_2 \in U_1$ (שוב, U_1 הוא תת־מרחב ולכן סגור לחיבור). כלומר, קיבלנו: $u_2 \in U_1$ וזו סתירה לכך ש: $u_2 \in U_2 \backslash U_1$.
הגענו לסתירה ולכן הטענה נכונה - $U_1 \subseteq U_2 \vee U_2 \subseteq U_1$.

<u>סכום של תתי־מרחבים:</u>
(איחוד של מרחבים וקטורים לא ענה על הציפיות - הוא לא תת־מרחב...אנחנו רוצים פעולה על מרחבים וקטוריים שתיתן לנו מצד אחד מרחב וקטורי, ומצד שני קבוצה שמכילה את המרחבים המקוריים, כמו איחוד).
יהיו V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ו־$U_1, U_2 \leq V$ תתי־מ"ו. הסכום של U_1, U_2 מוגדר כך:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

כלומר, קבוצת כל הסכומים של איבר מ־U_1 ואיבר מ־U_2. במילים אחרות, כדי להראות ש: $v \in U_1 + U_2$ אנו צריכים להראות שקיימים $u_1 \in U_1$,

$U_2 \ni u_2$ כך ש: $v = u_1 + u_2$.

למשל:

$$V = \mathbb{R}^3, U_1 = \{(x,0,0)\,|x \in \mathbb{R}\}, U_2 = \{(0,y,0)\,|y \in \mathbb{R}\}$$

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} = \{(x,0,0) + (0,y,0)\,|x, y \in \mathbb{R}\}$$

ואפשר לרשום:

$$U_1 + U_2 = \{(x,y,0)\,|x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z)\,|z = 0\}$$

הערות:

א. $U_1 + U_2$ הוא תת־מ"ו.

ב. יתר על כן, $U_1 + U_2$ הוא תת־המרחב הקטן ביותר שמכיל את U_1, U_2; כלומר, אם W תת־מרחב שמכיל את U_1, U_2, בהכרח גם:

$$U_1 + U_2 \subseteq W$$

ג. אפשר לחבר יותר משני תתי־מרחבים, למשל:

$$U_1 + U_2 + U_3 = \{u_1 + u_2 + u_3 | u_i \in U_i\}$$

ד. אפשר לשאול אלו קשרים פעולות החיתוך והסכום מקיימות. למשל, האם מתקיים:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$$

ה. לכל $U \leq V$:

$$\{0\} + U = U + \{0\} = U$$

$$U + V = V + U = V$$

ו. חילופיות: $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$, וגם קיבוציות: $U_1 + (U_2 + U_3) = (U_1 + U_2) + U_3$.