תרגיל 7

1. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

2. יהי (X,τ) מ"ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ"ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

3. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$-$ $A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.
   (א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.
   (ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

4. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
   $(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\mathbb{N},\emptyset\}$ ו $O_n = \{1,...,n\}$.

5. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X,τ) מ"ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y \subseteq X$ הוא גם T_2.

6. יהא (X,τ) מ"ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau \subseteq \tau'$ טופולגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.

7. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ"מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ"מ ויהיו S_1,S_2 קבוצות סגורות זרות.
   (א) לכל $x \in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2) > 0$
   (ב) לכל $x \in S_1$ נגדיר $r_x = \frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1 = \cup_{x\in S_1} B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y \in S_2$ נגדיר $r_y = \frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2 = \cup_{y\in S_2} B(y,r_y)$. ברור כי V_1,V_2 פתוחות וזרות ו $S_i \subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1,V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.

8. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $\{C = A \cup T | A \in \mathbb{CL}, T \subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופלוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O \in \tau \iff O = B \cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c \subseteq R$.

(ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ הוא האוסדורף.

(ג) הראו שאם $O \in \tau$ כך ש $S \subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

(ד) הוכיחו שלא קיימות U, V פתוחות בτ וזרות כך ש $S \subseteq V$, $0 \in U$. הסיקו ש $(\mathbb{R}, \tau)$ אינו T_3.