תרגול 14

12 בינואר 2014

העתקות לינאריות (ה"ל):

הגדרה: יהיו V, W שני מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. ה"ל היא פונקציה $T : V \to W$ כך ש
לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$.
תכונות בסיסיות:

1. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$
2. $T(0_V) = 0_W$

דוגמאות:

1. יהיו $V = \mathbb{F}^n,\ W = \mathbb{F}^m$ שניהם מעל $\mathbb{F}$. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$
אזי העתקה $L_A : V \to W$ המוגדרת $v \mapsto Av$ היא ה"ל.
הוכחה: לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $L_A(\alpha v_1 + v_2) = A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + A v_2 = \alpha L_A(v_1) + L_A(v_2)$.
2. $V = \mathbb{F}^{n\times n},\ W = \mathbb{F}$ שניהם מעל $\mathbb{F}$.
אזי העתקה $trace : V \to W$ המוגדרת $A \mapsto tr(A)$ היא ה"ל.
3. $V = \mathbb{R}_n[x],\ W = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ שניהם מעל $\mathbb{R}$.
אזי העתקה $D : V \to W$ המוגדרת $p(x) \mapsto \frac{d}{dx}p(x) = p'(x)$ היא ה"ל. הוכחה

$$D[\alpha p_1(x) + p_2(x)] = [\alpha p_1(x) + p_2(x)]' = \alpha p_1'(x) + p_2'(x) = \alpha D[p_1(x)] + D[p_2(x)]$$

תרגיל: יהיו $T, S : V \to W$ שתי ה"ל. $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל V. נניח $T(v_i) = S(v_i)$ לכל $1 \le i \le n$
הוכח: $T = S$ (כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = S(v)$)
הוכחה: יהי $v \in V$ אזי $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. $\Leftarrow$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 S(v_1) + \alpha_2 S(v_2) + \cdots + \alpha_n S(v_n) = S(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

משפט (ההגדרה של ה"ל): יהיו V,W שני מ"ו מעל $\mathbb{F}$. $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל V.
$w_1,\dots,w_n\in W$ וקטורים כלשהם.
אזי קימת ה"ל יחידה $T:V\to W$ כך ש $T(v_i)=w_i$ לכל i
(מסקנה ניתן להגדיר ה"ל יחידה ע"י קביעה לאן ישלח בסיס ל V).
דוגמאות:

1. $V=\mathbb{R}_2[x]$ שניהם מעל $\mathbb{R}$. תהא $T:V\to V$ה"ל המקימת $T(1)=x+2,\,T(x)=1,\,T(x^2)=-2x+1$.
כתוב את העתקה מפורשות (כלומר לאן Tשולחת פולינום כללי $a+bx+cx^2$)
פתרון:

$$\begin{aligned}T(a+bx+cx^2) &= aT(1)+bT(x)+cT(x^2)\\ &= a(x+2)+b(1)+c(-2x+1)=(2a+b+c)+(a-2c)x\end{aligned}$$

הגדרות:
תהא $T:V\to W$ ה"ל.

1. הגרעין של T מוגדר $kerT=\{v\in V\,|\,T(v)=0\}\subset V$
2. התמונה של T מוגדרת $ImgT=\{T(v)\,|\,v\in V\}\subset W$
3. הדרגה של Tמוגדרת $rank(T)=dim(ImgT)$
4. האפסיות של T מוגדרת $\nu(T)=dim(kerT)$

תרגיל : יהיו $V=\mathbb{R}^3,\,W=\mathbb{R}^2$ והמישור
$$U=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+y+z=0\}=\{\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}\}=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}\subset V$$
מצא ה"ל $T:V\to W$ כך ש $kerT=U$ וגם $imgT=span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\})$.
פתרון:
נשלים לבסיס ל V בעזרת $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$. (3 וקטורים בת"ל= בסיס ל V)
נגדיר $T(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},T(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},T(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
עפ"י משפט ההגדרה אכן הגדרו ה"ל.
משפט הדרגה:
תהא $T:V\to W$ ה"ל. אזי $\nu(T)+rank(T)=dim(V)$.
תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x],\,W=\mathbb{R}^2$ נגדיר $T:V\to W$ ה"ל באופן הבא
$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. מצא גרעין, תמונה, דרגה ואפסיות של T

פתרון:

$$\begin{aligned} kerT &= \{p(x)=a+bx+cx^2\in V \,|\, T(p(x))=0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \\ &= \{a+bx+cx^2\in V \,|\, \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}=\{cx^2\in V\}=span(x^2)\end{aligned}$$

$ImgT=\{T(p(x))\,|p(x)\in V\}=\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\,|\,a+bx+cx^2\in V\}=\mathbb{R}^2=$
$span\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$

בנוסף $\nu(T)=1,\, rank(T)=2$ ואכן $1+2=dimV=3$

משפטון: תהא $T:V\to W$ ה"ל.

אזי Tחח"ע $\Leftrightarrow kerT=\{0\}$

תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x],\, W=\mathbb{R}^2$ האם קימת $T:V\to W$ ה"ל חח"ע?

פתרון: לא. נימוק: לפי משפט הדרגה $\nu(T)+rank(T)=dim(V)=3$ כיוון ש $ImgT\subset W$ אזי $rankT\le dimW=2$ ולכן $\nu(T)\ge 1$ כלומר קים $0\neq p(x)\in V$ כך ש $T(p(x))=0 \Leftarrow T$ לא חח"ע.

תרגיל: תהא $T:V\to W$ ה"ל חח"ע. $B=\{v_1\ldots,v_n\}\subset V$קבוצה בת"ל

(חח"ע פירושו עבור $v_1\neq v_2\in V \Leftarrow T(v_1)\neq T(v_2)$. שקול ל $T(v_1)=T(v_2)$ $\Leftarrow v_1=v_2$)

הוכח: $C=\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}\subset W$ בת"ל.

פתרון: נניח $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0$ צ"ל $\alpha_i=0$ לכל i.

$T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0=T(0)$ כיוון ש T חח"ע נקבל $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$ כיוון ש B בת"ל $\alpha_i=0$ לכל i.

מסקנה $dimV\le dimW$

הוכחה (נוכיח עבור המקרה הסופי): נבחר $B=\{v_1\ldots,v_n\}$ בסיס ונסמן $C=\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$

$dimV=n=|B|=|C|\le dimW$.

הצגה לפי בסיס

המטרה של החלק הזה להראות כי יש קשר חזק בין ה"ל למטריצות.

הגדרה: יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$. $B=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס ל V. יהא $v\in V$ ראינו שניתן להציגו באופן יחיד כצ"ל של איברי . $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. ההצגה של v לפי בסיס B הוא הוקטור

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n.$$

דוגמא $V=\mathbb{R}_2[x]$נציג את $v=1+x\in V$ לפי הבסיס הסטנדרטי

1. $B=\{1,x,x^2\}$הבסיס הסטנדרטי:

$$1+x=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2 \text{ ולכן } [v]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

הגדרה: תהא $T:V\to W$ ה"ל. $E=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס ל V. $F=\{w_1,\dots w_m\}$ בסיס ל W. אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים E,F

הינה $\in \mathbb{F}^{m\times n}$ $$[T]_F^E=A=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ [T(v_1)]_F & [T(v_2)]_F & \cdots & [T(v_n)]_F\\ | & | & & |\end{pmatrix}$$

דוגמא: $V=\mathbb{R}_2[x],\ W=\mathbb{R}^2$. $E=\{1,x,x^2\},F=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ בסיסים בהתאמה

נגדיר $T:V\to W$ ה"ל באופן הבא $T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$.

מצא את $[T]_F^E$

פתרון: $$T(1)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Leftarrow [T(1)]_F=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Leftarrow [T(x)]_F=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(x^2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Leftarrow [T(x^2)]_F=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן $$[T]_F^E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

משפט: תהא $T:V\to W$ ה"ל. $E=\{v_1,\dots v_n\}$ בסיס ל V. $F=\{w_1,\dots w_m\}$ בסיס ל W.
אזי לכל $v\in V$ מתקיים $[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E$
(כלומר להפעיל את T על וקטור שקול להפעיל מטריצה)

דוגמא: נמשיך עם הדוגמא ממקודם: $v=1+x+x^2\in V$ מהו $T(v)$?
פתרון: כמובן שאפשר לחשב ישירות. אנחנו נדגים את המשפט

$$[v]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

לפי המשפט $$[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

ולכן $$T(v)=2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

הערות:

1. אם $T:V\to V$ B,B' שני בסיסים אזי קימת מטריצה הפיכה P כך ש $[T]_B^B=P[T]_{B'}^{B'}P^{-1}$(כלומר בעזרת יחס הדומות ניתן לעבור מבסיס לבסיס)

2. בעזרת המשפט הנ"ל ניתן לחקור ה"ל בעזרת מטריצות. ההתאמות הבאות מתקיימות (נסמן : $A=[T]_F^E$):

(א) $rank(T)=rank(A)$

(ב) $imgT \leftrightarrow C(A)$

(ג) $kerT \leftrightarrow N(A)$

(ד) $A = I \leftrightarrow T = id$ מטריצת הזהות

(ה) $A = 0 \leftrightarrow T = 0$ מטריצת האפס

(ו) $Tv = \lambda v \leftrightarrow A[v]_F = \lambda[v]_F$

(ז) ועוד...