מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ז

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 14/09/16

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & x>1 \\ |x| & -1<x\le 1 \\ 2x-3 & x\le -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x))\le |x-1|$

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $(z+i)^5=1+i$

3.

א. יהי וקטור במרחב $v\in\mathbb{R}^3$. הוכיחו כי $v\cdot v=0 \Leftrightarrow v=(0,0,0)$.

ב. יהיו שני וקטורים במרחב $v,u\in\mathbb{R}^3$ המאונכים זה לזה, כך ש $v,u\neq(0,0,0)$.
מצאו את כל הסקלרים (מספרים) $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $av+bu=(0,0,0)$.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $2\le n\in\mathbb{N}$ המספר n^3-n מחלק ב3.
בונוס: הוכיחו כי למעשה n^3-n מתחלק ב6.

5. פתרו את האינטגרל $\int\left[\left(3x^2+1\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)\right]dx$

6. <u>הגדרה:</u> אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **מלא** אם
$\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}:(a,b)\in R\vee(b,a)\in R$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו מלא.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם מלאים ואילו אינם מלאים:
$T=\{(n,n)|n\in\mathbb{N}\}$, $S=\{(n,m)\,|\,n\le m\}$, $R=\{(n,m)\,|\,n<m\}$

7. הוכיחו/הפריכו: לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\subseteq B\Leftrightarrow A\setminus B\subseteq B\setminus C$