פתרון מבחן לינארית 1 88-112 מועד א' קיץ תשפ"ב 24.08.2022

1. (14 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $W$ תת־מרחב בעל בסיס $\{v_1, v_2\}$.

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ מתקיים $W = \{tv_1 + sv_2 + w \,|\, t, s \in \mathbb{F}\}$.

(ב) יהי $v \in V$. הוכיחו שאם $\{tv_1 + sv_2 + v \,|\, t, s \in \mathbb{F}\}$ הוא תת־מרחב של $V$, אז בהכרח $v \in W$.

סעיף א':

נבצע הכלה דו-כיוונית

יהי $tv_1 + sv_2 + w \in \{tv_1 + sv_2 + w | t, s \in \mathbb{F}\}$

כיוון ש $v_1, v_2, w \in W$, מתוך סגירות של תת מרחב נובע כי $tv_1 + sv_2 + w \in W$

בכיוון השני, יהי $x \in W$. נציג אותו כצירוף לינארי של הבסיס

$$x = av_1 + bv_2$$

כמו כן, נציג את $w \in W$ כצירוף לינארי של הבסיס

$$w = cv_1 + dv_2$$

לכן סה"כ

$$x = (a - c)v_1 + (b - d)v_2 + w \in \{tv_1 + sv_2 + w | t, s \in \mathbb{F}\}$$

סעיף ב':

כיוון שהקבוצה $\{tv_1 + sv_2 + v | t, s \in \mathbb{F}\}$ תת מרחב, היא בפרט מכילה את וקטור האפס.

כלומר קיימים $t, s \in \mathbb{F}$ כך ש

$$tv_1 + sv_2 + v = 0_V$$

לכן

$$v = -tv_1 - sv_2$$

וכיוון ש $v_1, v_2 \in W$ מתוך סגירות של תת מרחב נקבל כי $v \in W$.

2. (30 נק') נתבונן בתת־הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} t+1 & t+2s-1 \\ -s+1 & t-s+2\end{pmatrix}\middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$$
$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\middle| \begin{matrix} a-2b+c+d=0 \\ a=d\end{matrix}\right\}$$

(א) הוכיחו כי $U$ הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל-$U$ ול-$W$.

(ג) מצאו בסיס ומימד ל-$U+W$ ול-$U\cap W$.

סעיף א':

נשים לב כי

$$U=\left\{t\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \mid t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

כעת, כיוון ש

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\in span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

אז מתקיים כי

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי שאלה 1 סעיף א'.

(המרחב הנפרש הוא תת מרחב.)

סעיפים ב'+ג':

בסעיף א' מצאנו בסיס ל$U$ (קבוצה פורשת, וברור שבת"ל כי הוקטורים אינם כפולה אחד של השני).

נמצא בסיס ל$W$ ע"י פתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$$

נציב במשתנים החופשיים פרמטרים $c=t, d=s$ ונקבל כי

$$a=s$$
$$b=\frac{1}{2}t+s$$

כלומר הפתרון הכללי הוא

$$W=\left\{\begin{pmatrix}s & \frac{1}{2}t+s\\ t & s\end{pmatrix}\middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

וקיבלנו כי $W$ תת מרחב ממימד 2 (מצאנו בסיס).

מכאן אפשר לראות בבירור כי $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \cap W$ ולכן מימד החיתוך הוא לפחות 1.

אם מימד החיתוך הוא 2, אז

$$U \cap W \subseteq U$$

$$\dim U \cap W = \dim U$$

ומהכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים נקבל כי

$$U \cap W = U$$

אבל, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in U$ אך $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \notin W$ כיוון שהמטריצה לא מקיימת את המשוואות, בסתירה.

לכן

$$\dim U \cap W = 1$$

ולכן הבסיס לחיתוך הוא

$$U \cap W = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

לפי משפט המימדים, נובע כי

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 2 - 1 = 3$$

כמו כן, איחוד הבסיסים פורש את הסכום

$$U + W = span\left\{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולפי השלישי חינם, כיוון שמדובר בקבוצה פורשת בגודל המימד מדובר בבסיס.

3. (30 נק')

(א) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(ב) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת את תנאי סעיף א' שאינה חח"ע?

(ג) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת את תנאי סעיף א' וגם

$$\ker T = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}?$$

סעיף א':

ראשית נסמן

$$v_1 = (a, 1, a-2)$$
$$v_2 = (-a, -1, 1)$$
$$v_3 = (4, a, -a)$$

ובהתאמה

$$w_1 = (a, -a, 1)$$
$$w_2 = (-1, a, -1)$$
$$w_3 = (a, a, 1)$$

נבדוק מתי $\{v_1, v_2, v_3\}$ מהווה בסיס ל$\mathbb{R}_3$

$$\begin{pmatrix} a & -a & 4 \\ 1 & -1 & a \\ a-2 & 1 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a & 4 \\ 1 & -1 & a \\ -2 & 1+a & -a-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-a^2 \\ 1 & -1 & a \\ -2 & 1+a & -a-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-a^2 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & a-1 & a-4 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a-1 & a-4 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}$$

עבור $a \neq 1, \pm 2$ המטריצה הפיכה, כלומר העמודות בת"ל, כלומר אכן מדובר בבסיס.

לכל ערכים אלה קיימת העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה לפי משפט ההגדרה.

נציב את כל אחד משלושת הערכים הנותרים ונטפל בו בנפרד:

עבור $a = 1$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_2 = -v_1$$

ואילו $\{v_1, v_3\}$ בת"ל.

כמו כן במקרה זה נקבל כי

$$w_2 = -w_1$$

לכן כל העתקה המקיימת

$$Tv_1 = w_1$$

מקיימת כי

$$Tv_2 = T(-v_1) = -Tv_1 = -w_1 = w_2$$

נשלים את $\{v_1, v_3\}$ לבסיס ע"י $v_4$, ולכל בחירה של $w_4$ לפי משפט ההגדרה קיימת העתקה המקיימת

$$\begin{aligned} Tv_1 &= w_1 \\ Tv_3 &= w_3 \\ Tv_4 &= w_4 \end{aligned}$$

ולכן גם $Tv_2 = w_2$.

כלומר סה"כ עבור $a = 1$ קיימת העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה (קיימות אינסוף כאלה).

כעת נציב $a = 2$ ונקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_3 = -2v_2$$

ואילו $\{v_1, v_2\}$ בת"ל

אבל, נשים לב כי

$$w_3 = (2,2,1) \neq -2w_2 = (-2,4,-2)$$

ולכן לא קיימת העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה, שהרי העתקה לינארית כזו אמורה לקיים

$$w_3 = Tv_3 = T(-2v_2) = -2Tv_2 = -2w_2$$

לבסוף נציב $a = -2$ ונקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_3 = 2v_2$$

אך באופן דומה למקרה קודם, מתקיים כי

$$w_3 \neq 2w_2$$

ולכן אין העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה במקרה זה.

סה"כ קיימת העתקה לינארית אם ורק אם $a \neq \pm 2$.

סעיף ב':

לפי משפט הדרגה, כיוון שמימד התחום ומימד הטווח שווים, ההעתקה חח"ע אם ורק אם היא על.

כלומר אנו רוצים למצוא ערכי $a$ עבורם התמונה של ההעתקה היא כל הטווח.

במקרים בהם $a \neq 1, \pm 2$

התמונה נפרשת ע"י תמונות איברי הבסיס כלומר

$$Im\,(T) = span\{w_1, w_2, w_3\}$$

ונבדוק האם $Im(T) = \mathbb{R}^3$

נשים את התמונות בעמודות מטריצה:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & a \\ -a & a & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 & a \\ 0 & a-1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

עבור $a = 0$ (והרי הנחנו $a \neq 1$) יוצא כי ההעתקה $T$ אינה חח"ע

עבור $a = 1$, ראינו בסעיף קודם כי ניתן לשלוח את $v_4$ לוקטור כרצוננו, בפרט ל$w_4 = 0$ ואז ההעתקה אינה חח"ע.

סה"כ עבור $a = 0{,}1$ קיימת העתקה שאינה חח"ע המקיימת את תנאי ההשאלה.

לכל $a \neq 0{,}1, \pm 2$ יש העתקה יחידה המקיימת את תנאי השאלה והיא הפיכה (ובפרט חח"ע).

עבור $a = \pm 2$ אין העתקה כלל המקיימת את תנאי השאלה.

סעיף ג':

אם הגרעין אינו ממימד אפס, ההעתקה אינה חח"ע. לכן האפשרויות היחידות הן $a = 0{,}1$

עבור $a = 1$ קיבלנו כי

$$v_1 = (1,1,-1)$$
$$v_3 = (4,1,-1)$$

קל לוודא כי אם נבחר $v_4 = (0,0,1)$ נקבל כי $\{v_1, v_3, v_4\}$ בת"ל ומהווה בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

לכן קיימת העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה וגם

$$Tv_4 = w_4 = (0,0,0)$$

לכן $(0,0,1) \in Ker\ T$

כמו כן, במקרה זה

$$w_1 = (1,-1,1)$$
$$w_3 = (1,1,1)$$

ושני הוקטורים הללו בת"ל (אינם כפולה אחד של השני)

לכן

$$Im\,T = span\{Tv_1, Tv_3, Tv_4\} = span\{w_1, w_3, w_4\} = span\{w_1, w_3\}$$

כלומר התמונה היא ממימד 2, ולכן לפי משפט הדרגה הגרעין ממימד 1, וסה"כ אכן

$$\ker T = span\{(0,0,1)\}$$

עבור $a = 0$ ראינו כי התמונה ממימד 2 ולכן שוב הגרעין ממימד 1.

כמו כן, במקרה זה

$$w_3 = w_1$$

ולכן

$$T(v_3 - v_1) = (0,0,0)$$

ולכן

$$v_3 - v_1 \in \ker T$$

וכיוון שמימד הגרעין הוא 1 נובע כי

$$\ker T = span\{v_3 - v_1\} = span\{(0,1,-2) - (4,0,0)\} = span\{(-4,1,-2)\} \neq span\{(0,0,1)\}$$

לכן סה"כ יש העתקה המקיימת את תנאי הסעיף עבור $a = 1$ בלבד.

4. (15 נק') תהיינה $A \in \mathbb{R}^{6\times 7}$ ו-$B \in \mathbb{R}^{7\times 6}$ מטריצות כך ש-$AB$ הפיכה.

(א) (8 נק') הוכיחו כי הדרגה של $BA$ היא 6.

(ב) (7 נק') עוד נתון כי

$$BA\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס עבור $N(BA)$.

סעיף א':

ראשית, נשים לב כי

$$AB \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

וכיוון שהיא הפיכה מתקיים כי

$$rank(AB) = 6$$

כמו כן

$$6 = rank(AB) \leq rank(A)$$

וכיוון ש

$$rank(A) = \dim C(A) \leq \dim \mathbb{R}^6 = 6$$

נובע כי

$$rank(A) = 6$$

כעת, כיוון ש $AB$ הפיכה, מתקיים כי

$$rank((AB)A) = rank(A) = 6$$

מצד שני,

$$6 = rank\big((AB)A\big) = rank\,\big(A(BA)\big) \leq rank(BA)$$

כיוון ש

$$rank(BA) \leq rank(A) = 6$$

סה"כ נובע כי

$$rank(BA) = 6$$

סעיף ב':

ראשית נשים לב כי

$$BA \in \mathbb{R}^{7\times 7}$$

ולפי משפט הדרגה, כיוון ש $rank(BA) = 6$ נובע כי $\dim N(BA) = 1$

כעת, אם נסמן את עמודות המטריצה השמאלית

$$v_1 = (1,2,1,1,1,4,-3)$$
$$v_2 = (1,0,4,1,1,-2,0)$$

אז נובע מהנתון כי

$$BAv_1 = BAv_2$$

ולכן

$$BA(v_1 - v_2) = 0$$

ולכן

$$N(BA) = span\{v_1 - v_2\} = span\{(0,2,-3,0,0,6,-3)\}$$

5. (21 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד $n$ מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם קיימים בסיסים סדורים $B, C$ של $V$ שעבורם $([T]_C^B)^2 = 0$, אז $T^2 = 0$. (תזכורת: $T^2 = T \circ T$)

(ב) קיימים בסיסים סדורים $B, C$ של $V$ שעבורם $[T]_C^B$ אלכסונית.

(ג) אם לכל שני בסיסים סדורים $B, C$ של $V$ מתקיים $([T]_C^B)^2 = 0$, אז $T = 0$.

סעיף א':

הפרכה:

נביט במרחב $\mathbb{R}^2$ ובהעתקה המוגדרת ע"י הבסיס

$$Te_1 = 0$$
$$Te_2 = e_2$$

כעת נביט בבסיסים:

$$B = \{e_1, e_2\}$$

$$C = \{e_2, e_1\}$$

נובע כי המטריצה המייצגת היא

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

והיא מקיימת

$$([T]_C^B)^2 = 0$$

אבל

$$T^2 e_2 = e_2 \neq 0$$

ולכן $T^2 \neq 0$

סעיף ב':

הוכחה:

נעקוב אחרי הרעיון של הוכחת משפט הדרגה.

ניקח בסיס לגרעין של ההעתקה

$$\ker T = span\{v_1, \dots, v_k\}$$

ונשלימו לבסיס למרחב כולו

$$V = span\{v_1, \dots, v_n\}$$

ראינו בכיתה כי הבסיס לתמונה הוא

$$\{Tv_{k+1}, \dots, Tv_n\}$$

כעת, נבחר את הבסיס

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

ונשלים את הבסיס לתמונה לבסיס למרחב כולו:

$$\{w_1, \dots, w_k, Tv_{k+1}, \dots, Tv_n\}$$

ולכן המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ מקיימת ש $k$ העמודות הראשונות שלה הן עמודות אפסים, ולכל $k < i \leq n$ מתקיים כי

$$C_i([T]_C^B) = e_i$$

ולכן סה"כ המטריצה המייצגת היא מטריצה אלכסונית, שהאלכסון שלה מורכב מ$k$ אפסים, ולאחריהם $n-k$ אחדות.

סעיף ג':

הוכחה:

אם $T \neq 0$ אזי קיים $v_1 \in V$ כך ש $Tv_1 \neq 0$.

נשלים את $v_1$ לבסיס

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

ונשלים את $Tv_1$ לבסיס

$$C = \{Tv_1, w_2, \dots, w_n\}$$

אזי העמודה הראשונה של המטריצה המייצגת לפי הבסיסים הללו היא

$$C_1([T]_C^B) = [Tv_1]_C = e_1$$

ולכן גם העמודה הראשונה של המטריצה בריבוע היא

$$C_1(([T]_C^B)^2) = C_1([T]_C^B[T]_C^B) = [T]_C^B C_1([T]_C^B) = [T]_C^B e_1 = C_1([T]_C^B) = e_1 \neq 0$$