חזרה

משפט 7(נוסחת קושי)

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור ותהי γ מסילה סגורה בD. תהי $f\left(z\right)$ מוגזרת היטב ואנליטית בD. אזי לכל $z_{0}\in D$ כך ש$z_{0}\notin\gamma$ מתקיים

$$\text{Ind}_{\gamma}\left(z_{0}\right)f\left(z_{0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z$$

מסקנה

בתנאים של משפט 7, אם γ מסילת ג'ורדן בD אז לכל z_{0} בפנים לγ

$$f\left(z_{0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f\left(z\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z$$

משפט 8(משפט ליוביל)

פונקיצה <u>שלימה</u> וחסומה קבועה.

משפט 9

יהי $P\left(z\right)$ פולינום מרוכב לא קבוע. אזי קיים $z_{0}\in\mathbb{C}$ כך ש$P\left(z_{0}\right)=0$.

נחזור למשפט 7 ולמסקנה שלו. נרשום את נוסחת קושי בסגנון אחר קצת: אם $D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור, וγ מסילת ז'ורדן בD, ואם f אנליטית בD, אז לכל z בפנים של γ

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w$$

השערה נועזת:

$$f'\left(z\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f\left(z\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f\left(w\right)}{w-z}\right]\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{2}}\mathrm{d}w$$

השערה יותר נועזת: $f''\left(z\right)$ קיימת ונתונה ע"י

$$f''\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{2}}\right]\mathrm{d}w=\frac{2}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{3}}\mathrm{d}w$$

ואם כבר נשאר ש$f^{(n)}\left(z\right)$ קיימת לכל n:

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

ואמנם כל זה נכון!

משפט 10

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור, ותהי γ מסילת ז'ורדן בD. תהי $f\left(z\right)$ אנליטית בD. אזי לכל נקודה z בפנים של γ קיימות נגזרות $f^{(n)}\left(z\right)$ מכל הסדרים, ובפרט:

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

(אלה נוסחאות קושי לנגזרות)

רעיון ההוכחה

תחילה נוכיח את הנוסחה לנגזרת הראשונה $f'\left(z\right)$. ז.א., צ"ל שאם z בפנים של γ,

$$f'\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{2}}\mathrm{d}w$$

ובכן: יש לנו נוסחת קושי ל$f\left(z\right)$:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w$$

עבור Δz קטן נקודה $z+\Delta z$ אף היא בפנים של γ, ולכן

$$f\left(z+\Delta z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w-\left(z+\Delta z\right)}\mathrm{d}w$$

מכאן ש

$$\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\oint f\left(w\right)\left[\frac{1}{w-z-\Delta z}\cdot\frac{1}{w-z}\right]\mathrm{d}w=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\cancel{\Delta z}}\oint_{\gamma}f\left(w\right)\left[\frac{\cancel{\Delta z}}{\left(w-z-\Delta z\right)\left(w-z\right)}\right]\mathrm{d}w$$

נשאיף $\Delta z\to0$ לקבל

$$f'\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{\left(w-z\right)^{2}}\mathrm{d}w$$

כדרוש(רק לא הצדקנו את השאיפה $\Delta z\to0$ בתוך האינטגרל).
כעת נמשיך לומר

$$\frac{f'\left(z+\Delta z\right)-f'\left(z\right)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\oint_{\gamma}f\left(w\right)\left[\frac{1}{\left(w-z-\Delta z\right)^{2}}-\frac{1}{\left(w-z\right)^{2}}\right]\mathrm{d}w=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\cancel{\Delta z}}\oint_{\gamma}\frac{2\left(w-z\right)\cancel{\Delta z}+\Delta z^{\cancel{2}}}{\left(w-z\right)^{2}\left(w-z-\Delta z\right)^{2}}\mathrm{d}w$$

נשאיף $\Delta z \to 0$(ובלי להצדיק) אגף ימין ישאף לאינטגרל

$$\frac{2}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^3}\mathrm{d}w$$

עצם זה שקיים גבול מוכיח שf גזירה פעמיים[1] וקיבלנו את נוסחת קושי לנגזרת:

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-z)^3}\mathrm{d}w$$

כדרוש.

ההמשך באינדוקציה!

■

מסקנה

תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בתחום פתוח $D\subset\mathbb{C}$. אזי $f(z)$ גזירה ∞ פעמים בD.

הוכחה

ניקח $z_0\in D$ כלשהו. כיוון שD פתוח, יש סביבה

$$S=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<r\}$$

שמוכלת כולה בD. f אנליטית בS ונוכל לרשום לכל n

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r/2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\mathrm{d}w$$

זה מוצדת כי S קמורה. בפרט מצאנו שf גזירה ∞ פעמים בz_0. אבל z_0 נקודה כלשהי בD, ולכן קיבלנו מ.ש.ל.

דוגמה - ב$\mathbb{R}$ זה לא עובד

לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר $f(x)=x^{4/3}$. אז לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת $f'(x)={}^4\!/\!_3x^{1/3}$. אמנם $f''(x)=\frac{4}{9}x^{-2/3}$, שלא קיימת עבור $x=0$.

כמו כן הפונקציה $g(x)=\prod_{n=1}^{30\cdot 10^9}(x-n)^{4/3}$ גזירה פעם אחת ולא פעמיים ב$30,000,000,000$ נקודות.

אפשר גם להמציא פונקציה $f(x)$ שגזירה פעם אחת בכל $\mathbb{R}$, ולא קיימת $f(X)$באף נקודה.

כמו כן, $h(x)=x^{7/3}$ גזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$ ולא קיימת $h'''(0)$.

[1] בגלל שאנחנו ב$\mathbb{C}$. ב$\mathbb{R}$ זה לא מוכיח אוטומטית.

נשאלת השאלה

נגדיר לכל $z\in\mathbb{C}$, $f\left(z\right)=z^{4/3}$, ולכאורה מצאנו פונקציה גזירה פעם אחת ולא פעמיים על $\mathbb{C}$, בסתירה למשפט 10.

אבל למעשה אין סתירה כי הפונקציה $f\left(z\right)=z^{4/3}$ לא ניתנת להגדרה כפונציה אנליטית בסביבה שלמה של 0, אלא שצריכים לבחור איזה ענף שלא רציף ולא גזיר על קרן מסויימת מ0 עד ∞.

מסקנה 2

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פתוח, ותהי $f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בD. אזי גם $f'\left(z\right)$ אנליטית בD.

הוכחה

לפי המסקנה קודמת, $f''\left(z\right)$ קיימת בכל D. ז.א. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f''\left(z\right)$ קיימת בכל D. לכן $f'\left(z\right)$ אנליטית בD.

משפט 11(משפט מוררה Morera)

(כעין הפכית למשפט קושי)

יהי $f\left(Z\right)$ מוגדרת ורציפה בD. נניח שלכל מסילה סגורה γ בD, $\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$ אזי f אנליטית בD.

הוכחה

נתון שf רציפה בD ולכל γ סגורה בD

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$$

במשפט 4 הוכחנו שבדיוק בתנאים אלה קיימת לf פונקציה קדומה, $F\left(z\right)$, כך שלכל $z\in D$, $F'\left(z\right)=f\left(z\right)$. אבל במסקנה 2 למשפט 10 הוכחנו שהנגזרת של פונקציה אנליטית אף היא אנליטית. לכן f אנליטית בD.

$\blacksquare$

מסקנה

יהי $D\subset\mathbb{C}$ פתוח. נניח ש$f\left(z\right)$ מוגזרת ורציפה בD. עוד נניח שלכל $z_0\in D$ קיימת סביבה S_{z_0} כך ש$z_0\in S_{z_0}\subset D$ כך שלכל משולש $T\subset S$, $\int_{\partial T}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$, אזי $f\left(z\right)$ אנליטית בD.

הוכחה

ניקח $z_0 \in D$ כלשהו. לפי הנתון יש עיגול פתוח S סביב z_0 כך ש$S \subset D$, ולכל משולש $T \subset S$,

$$\int_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

במשפט 6 הוכחנו שבתחום קמור(כמו S) תנאי זה מספיק להוכיח שלf יש פונקציה קדומה $F(z)$ כך ש$F'(z) = f(z)$ לכל $z \in S$. לפי מסקנה 2 של משפט 10, $f(z)$ אנליטית בS. בקיצור:f אנליטית בסביבה של כל נקודה $z_0 \in D$, וזה בעצמו אומר שf אנליטית בD.

■

"תחרות עולמית"

מצאו תנאים מינימליים לכך שפונקציה $f(z)$ רציפה ב$\mathbb{C}$ תהיה פונקציה שלימה

האלוף

פרופסור זלצמן הוכיח שאם $f(z)$ רציפה ב$\mathbb{C}$, ואם $r_1, r_2 > 0$ והמנה r_1/r_2 היא לא שורש של פונקציית בסל $B_1(z)$(שיש לה מספר בן מניה של אפסים), ואם לכל $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\int_{|z-z_0|=r_1} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r_2} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

אזי f פונקציה שלימה.

במילים: לכל נקודה צריך להוכיח שהאינטגרלים על שני מעגלים בשני רדיוסים שווים 0.

סדרות וטורים של פונקציות

הגדרה

סדרה של פונקציות היא רשימה אינסופית $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות המוגזרות בתחום משותף $S \subset \mathbb{C}$.

לכל $z_0 \in S$, הסדרה$\{f_n(z_0)\}$ סדרה של מספרים מרוכבים.

אפשר לדון האם הסדרה מתכנסת. בזה מוגדרת תת קבוצה $T \subset S$ שהיא תחום ההתכנסות של הסדרה:

$$T = \left\{ z \in S \middle| \exists \lim_{n\to\infty} f_n(z) \right\}$$

על T מוגדרת "פונקציה גבולית" $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

הגדרה

עם הנתונים כנ"ל אומרים ש

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$$

במידה שווה(במ"ש) על S אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$ אזי $|f_n(z)-f(z)|<\epsilon$ לכל $z\in S$.

משפט 1

נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה

$$f_n(z)=f_n(x+iy)=u_n(x,y)+iv_n(x,y)$$

וגם מוגדרת

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

באיזו קבוצה $S\subset\mathbb{C}$, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ במ"ש על S
2. $\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in S}|f_n(z)-f(z)|=0$
3. $u_n\to u$ וגם $v_n\to v$ במ"ש על S.

דוגמה סטנדרטית

עבור כל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$f^n(z)=z^n$$

קל לבדוק

$$\lim_{n\to\infty}z^n=\begin{cases}0 & |z|<1\\ 1 & z=1\\ \text{does not exist} & \text{otherwise}\end{cases}$$

בפרט $z^n\to 0$ בעיגול היחידה $U=\{z||z|<1\}$

שאלה

האם $\lim_{n\to\infty}z^n=0$ במ"ש על U?

תשובה

לא! ובפרט עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו,

$$\sup_{z \in U} |z^n - 0| = \sup_{z \in U} |z^n| = \sup_{z \in U} |z|^n = 1 \underset{n \to \infty}{\nrightarrow} 0$$

ולכן ע"פ תנאי 2 של משפט 1 אין כאן התכנסות במ"ש.

שאלה נוספת

אם $0 < r < 1$ אז $z^n \to 0$ בעיגול $B_r = \{z \in \mathbb{C} | |z| \le r\}$. האם ההתכנסות הזאת היא במ"ש?

תשובה: כן!

הוכחה

עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו,

$$\sup_{z \in B_r} |f_n(z) - f(z)| = \sup_{z \in B_r} |z^n - 0| = \sup_{z \in B_r} |z|^n - r^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש על B_r

משפט 2

תהי $S \subset \mathbb{C}$ ונניח שלכל n, $f_n(z)$ מוגדרת ורציפה בS. עוד נניח ש$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ במ"ש על S. אזי $f(z)$ רציפה בS.

משפט 3

תהי γ מסילה ב$\mathbb{C}$. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ $f_n(z)$ מוגדרת ורציפה לאורך γ. עוד נניח ש$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ במ"ש על γ. אזי

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)\ \mathrm{d}z$$

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$ נתון. כיוון ש$f_n \to f$ במ"ש על γ, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$, $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{|\gamma|}$ ($|\gamma|$=אורך γ) לכל $z \in \gamma$.
כעת אם $n > n_0$,

$$\left| \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z - \int_\gamma f_n(z)\ \mathrm{d}z \right| = \left| \int_\gamma [f(z) - f_n(z)]\ \mathrm{d}z \right| \le ML < \frac{\epsilon}{|\gamma|} |\gamma| = \epsilon$$

הדבר אפשרי לכל $\epsilon > 0$, לכן $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$.

$\blacksquare$

משפט 4

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום כלשהו. נניח שלכל n, $f_n(z)$ מוגדרת ואנליטית בD ולנקודה אחת (לפחות) $z_0 \in D$ קיים $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0)$. עוד נניח שקיים $f'(z)$ $g(z) = \lim\limits_{n\to\infty}$ במ"ש על D. אזי $f'(z) = g(z)$.

הגדרה

טור של מספרים מרוכבים הוא סכום אינסופי

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + ...$$

בהתאם לטור זה מוגדרת סדרה של סכומים חלקיים

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$$

אם קיים $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ אז אומרים שהטור שלנו מתכנס וסכומו "S", ז.א. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ואם $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ אינו קיים אומרים שהטור מתבדר.

משפט 5

יהיו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n$ ו$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ שני טורים מרוכבים, וc מספר מרוכב. אזי:

1. אם $\sum z_n$ ו$\sum w_n$ שניהם מתכנסים אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z_n + cw_n)$ מתכנסו וסכומו הוא $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n + c\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ וגם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ מתכנסים, ואם כן

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

3. טור שמתכנס בהחלט מתכנס. ז.א. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס, אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס.

הוכחה

1. איך יכול להיות אחרת?
2. איך יכול להיות אחרת?
3. לכל n, $|z_n| \geq \underbrace{|x_n|}_{=|\mathrm{Re} z_n|} \geq 0$. נתון ש$\sum |z_n|$ מתכנס. ע"פ מבחר ההשוואה מאינפי 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ מתכנס. ממשפט נוסף באינפי 1 נסיק ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס(כי טור ממשי שמתכנס בהחלט מתכנס). באותו נימו נסיק ש$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ מתכנס, ולכן ע"פ סעיף ב' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס.

הגדרה

תהי $S \subset \mathbb{C}$ קבוצה כלשהי. נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה $f_n : S \to \mathbb{C}$. אז אפשר לבנות טור של פונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (z \in S)$$

בהתאם לטור הזה יש סדרת סכומים חלקיים

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

ובכך מוגדר תחום ההתכנסות

$$S \supset T = \left\{ z \in S \middle| \exists \lim_{N\to\infty} S_N(z) \right\}$$

על T מוגדרת פונקציה גבולית

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} S_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

אם $S_N(z) \to f(z)$ במ"ש על T אז אומרים שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס ל$f(z)$ במ"ש על T.

משפט 1'

נניח שלכל n מוגדרת פונקציה $f_n(z)$ בקבוצה $S \subset \mathbb{C}$. נרשום

$$f_n(z) = f_n(x+iy) = u_n(x,y) + iv_n(x,y)$$

התנאים הבאים שקולים

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(z\right) = f\left(z\right)$ במ"ש על S

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\left(x,y\right) = u\left(x,y\right)$ במ"ש על S וגם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\left(x,y\right) = v\left(x,y\right)$ במ"ש על S

3. $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{z\in S}\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty} f_n\left(z\right)\right| = 0$

דוגמה חשובה

נגדיר טור הנדסי מרוכב

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

נרשום סכומים חלקיים

$$S_N\left(z\right) = 1 + z + z^2 + \dots + z^N$$

לכן

$$zS_N\left(z\right) = z + z^2 + \dots + z^N + z^{N+1}$$

$$S_N\left(z\right) - zS_N\left(z\right) = 1 - z^{N+1}$$

$$S_N\left(z\right) = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \qquad \left(z \neq 1\right)$$

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{N\to\infty} S_N\left(z\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} = \begin{cases}\dfrac{1}{1-z} & |z| < 1\\ \text{does not exist} & \text{otherwise}\end{cases}$$

נראה שבעיגול היחידה כולו U אין התכנסות במ"ש, אבל על כל תת עיגול $B_r = \left\{z \middle| |z| \leq r\right\}, r < 1$ יש התכנסות במ"ש.