

## גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית 88-201

### מבחן מועד א' סמסטר קיץ תשע"ה

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).  
ענו על כל השאלות. במבחן למעלה מ-100 נקודות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. (18 נק') סווגו את המשטח המתואר ע"י המשוואה

$$x + 2x^2 - y + 4xy + 2y^2 - 2xz - 2yz + 5z^2 = 0$$

2. ממפים את ספרת היחידה ע"י

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

בתחום  $\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$ . נסמן  $u^1 = \theta, u^2 = \varphi$ .

(א) (10 נק') מצאו את היעקוביאן של המפה. באילו נקודות הוא לא רגולרי (הדרגה אינה מלאה)?

(ב) (10 נק') מצאו את התבנית היסודית הראשונה.

(ג) (10 נק') מצאו את מקדמי כריסטופל.

(ד) (10 נק') מהן משוואות הקווים הגאודזיים?

3. (12 נק') נתונה יריעה כך שבכל נקודה עקמומיות גאוס מקיימת  $K < 0$ . הוכיחו: אין קווים גאודזיים סגורים חלקים ביריעה זו (כלומר, הקווים הגאודזיים כולם אינסופיים).

4. (15 נק') מטריצת המטריקה של יריעה נתונה ע"י

$$g = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

מצאו וקטור המאונך לוקטור  $r_u - r_v$ .

5. יהי  $\gamma(s)$  עקום נורמלי (רציף וגזיר פעמיים ברציפות) בפרמטריזציה טבעית ב- $\mathbb{R}^2$  שעקמומיותו  $\kappa(s) \leq 1$  לכל  $s$ . הוכיחו:

(א) (12 נק') לכל  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$  מתקיים  $\langle \dot{\gamma}(s_1), \dot{\gamma}(\frac{\pi}{4}) \rangle \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(ב) (13 נק') המרחק האוקלידי  $d(\gamma(0), \gamma(\frac{\pi}{2})) \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ .

**בהצלחה**