מבנים אלגבריים להנדסה, 83-218, בוחן 1 תשע"ט

כ"ד אדר ב ה'תשע"ט, 31.3.19

מרצה: פרופ' נתן קלר.
מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בחרו **3 מתוך 4** השאלות. כל שאלה שווה 34 נקודות.
- **יש לענות על השאלון. המחברות לטיוטא בלבד!**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. קבעו עבור הקבוצות והפעולות הבאות, האם הן אגודה/מונואיד/חבורה. באגודה מצאו את כל היחידות (שמאליות וימניות).

(א) אוסף המטריצות $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$, עם כפל מטריצות רגיל. (17 נק')

(ב) אוסף הסדרות הבוליאניות האינסופיות $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}\}$, עם פעולת קסור ($\oplus$) רכיב רכיב. כלומר, אם $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ אז $a \star b = (a_n \oplus b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (17 נק')

2.

(א) תהי $\sigma \in S_{15}$ המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma = (1,15)(2,5,7,8)(6,9,12)$$

i. מצאו את $sgn(\sigma), sgn(\sigma^{-1})$. (10 נק')

ii. מצאו $\tau \in S_{15}$ שלא מתחלף עם σ. (7 נק')

(ב) תהא G חבורה, ויהיו $g, h \in G$. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$(gh)^n = e \iff (hg)^n = e$$

(17 נק')

3.

(א) תהא G חבורה בה מתקיים: $\forall g \in G : g^2 = e$. הוכיחו: G חבורה חילופית. (17 נק')

(ב) נגדיר את חבורת הקווטרניונים:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זו ביחס לכפל מטריצות היא חבורה. (סימונים מקובלים:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ואז $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$).

מצאו את $C(G)$. (17 נק')

4. יהי $n > 2$, ונתבונן בחבורת התמורות S_n.

(א) כמה תמורות זוגיות יש? (17 נק')

(ב) נסמן $\sigma_1 = (1,2,3,\ldots,n), \sigma_2 = (1,2)$. הראו שכל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י σ_1, σ_2 והופכיהן. (17 נק')