אי תלות בקואורדינטות

בהתמרת קואורדינטות מ-q ל-$p=p(q)$ אם הפונקציה $q=q_0$ נותנת מינימום של הפונקציונל (כלומר מקיימת את משוואת אוילר לגרנז') אזי גם $p_0 \equiv p(q_0)$ מקיימת את משוואת אוילר לגרנז'.

הוכחה. אם $p=p(q)$ אז $\dot{p}(q,\dot{q})=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\dot{q}$ ולכן

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\partial \dot{p}}{\partial q}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}$$

כמו כן

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\partial \dot{p}}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$$

ידוע כי

$$0=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

כלומר

$$0=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)$$

אבל

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$$

וכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=\frac{\partial \dot{p}}{\partial q}=\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}$$

ומכאן

$$0=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}$$

ומכאן

$$0=\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$$

כלומר אם $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ לא מתאפס (ההתמרה הפיכה) אזי גם p מקיים משוואת אוילר לגרנז'.[3] □