תורת הגרפים - הרצאה 1

30 באוקטובר 2011

הגדרה

גרף $G=(V,E)$ הוא קבוצת קודקודים V (Veritces, nodes) ואוסף של זוגות לא סדורים של קודקודים E (Edges).
אוסף = רב-קבוצה, כלומר מותרות חזרות, למשל $\{\{a,a,b\}\}$. כל זוג בE נקרא צלע.

הערות

1. אם $|V|<\infty$ וגם $|E|<\infty$ הגרף נקרא סופי.
2. הגרף שהוגדר לעיל נקרא גרף לא מכוון.

הגדרה

גרף $G=(V,E)$ הוא גרף מכוון אם V היא קבוצת קודקודים וE אוסף זוגות <u>סדורים</u> של קודקודים.
(כל זוג כזה נקרא צלע או צלע מכוונת).

הגדרה

גרף $G=(V,E)$ לא מכוון הוא גרף <u>פשוט</u> אם E <u>קבוצה</u> של זוגות לא סדורים $(u,v)\in V^2$ של קודקודים וגם לכל זוג כזה $u\neq v$.

הגדרה

יהי $G=(V,E)$ גרף כללי לא מכוון.
צלע $(u,u)\in E$ כאשר $u\in V$ נקראת לולאה, כלומר צלע מהקודקוד אל עצמו.

הערה

גרף הוא פשוט אם אין בו ריבוי צלעות ואין בו לולאות.
ריבוי צלעות פירושו שישנם שני קודקודים $u,v\in V$ כך שהצלע (u,v) מופיעה יותר מפעם אחת בE.
למשל, הגרף הסופי:

$$\begin{aligned} V &= \{u,v\} \\ E &= \{\{(u,v),(u,v)\}\} \end{aligned}$$

הערה

בדר"כ מציירים גרף על המישור. כל קודקוד הוא נק' במישור וצלע היא עקומה רציפה שקצותיה 2 הקודקודים. בגרף מכוון, הצלעות מקודדות ע"י חצים.

דוגמאות

1. גרף $G=(V,E)$

$$\begin{aligned} V &= \{u,v,w,x\} \\ E &= \{(u,v),(v,w),(w,x),(x,u)\} \end{aligned}$$

גרף פשוט.

2. גרף $H=(V,E)$, $G=H$.

הערה

בקורס זה נעסוק כמעט תמיד (אא"כ יאמר אחרת) בגרפים סופיים לא מכוונים.

מוטיבציה

תורת הגרפים תפסה מעמד מרכזי (ב50 השנים האחרונות) במתמטיקה ובמדעים בכלל כי:

1. גרפים הם שפה נוחה לניסוח בעיות ופתרונן.
בעיות מעשיות:

   (א) תחבורה (רשת כבישים למשל)

   (ב) תקשורת

   בעיות מתמטיות:

   (א) הילוכים אקראיים

   (ב) מיון של חבורות\יריעות.

הערה

אנו מניחים שיש לפחות קודקוד אחד לגרף.

הגדרה

הגרף הריק מסדר n הוא הגרף:

$$\begin{aligned} N_n &= (V,E) \\ |V| &= n \\ E &= \emptyset \end{aligned}$$

הגדרה

הגרף המלא מסדר n מסומן K_n והוא הגרף הפשוט:

$$\begin{aligned} K_n &= (V,E) \\ |V| &= n \\ \forall u,v\in V & \quad (u,v)\in E \end{aligned}$$

הגדרה

מסילה מסדר n מסומנת P_n היא הגרף:

$$\begin{aligned} P_n &= (V,E) \\ V &= \{v_0,v_1,..,v_n\} \\ E &= \{(v_i,v_{i+1}) \mid 0\le i\le n-1\} \end{aligned}$$

הגדרה

מעגל מסדר n מסומן בC_n והוא הגרף הפשוט:

$$\begin{aligned} C_n &= (V, E) \\ V &= \{v_0, .., v_n\} \\ E &= \{(v_i, v_{i+1}) \mid 0 \le i \le n-1\} \cup \{(v_0, v_n)\} \end{aligned}$$

הגדרה

יהי $G = (V, E)$ גרף סופי לא מכוון, $u \in V$ קודקוד.
הדרגה של u בG היא מספר הצלעות החלות בu, ומסומנת $d_G(u)$.
בגרף פשוט, הדרגה היא מספר השכנים.
דרגה מקסימלית של G היא:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V(G)} \{d_G(u)\}$$

דרגה מינימלית של G היא:

$$\delta(G) = \min_{u \in V(G)} \{d_G(u)\}$$

הגדרה

גרף G עבורו $\Delta(G) = \delta(G) = k$ נקרא גרף k-רגולרי.
כלומר גרף הוא k-רגולרי אם דרגת כל קודקודיו היא k.

1. גרפים 0-רגולריים הם הגרפים הריקים.
2. גרפים 1-רגולריים הם איחוד זר של עותקים של K_2.
3. גרפים 2-רגולריים פשוטים הם איחוד זר של מעגלים מסדר ≤ 3.
4. גרפים 3-רגולריים פשוטים: למשל, K_4, או לקחת משושה\מתומן ולחבר כל קודקוד לנגדי שלו, או קוביה.
עם 10 צלעות אפשר לקחת מעושר או גרף פטרסן.

תרגיל

עבור k, n אי זוגיים לא קיים גרף k-רגולרי מסדר n.

קשירות

הערה מקדימה

גרף אינו מושג גאומטרי, למרות מושגים גאומטריים מוכרים מתורת הגרפים.
כדי להגדיר קשירות נגדיר הגדרה אחרת קודם:

הגדרה

יהי $G = (V, E)$ גרף. סדרת קודקודים (לאו דווקא שונים) $v_1, v_2, ..., v_m \in G$ היא:

1. הילוך בG אם לכל $1 \le i < m$ מתקיים $(v_i, v_{i+1}) \in E$.
2. הילוך סגור אם היא הילוך וגם $v_1 = v_m$.
3. מסלול (או שרשרת) אם היא הילוך שבו אין $1 \le i < j < m$ כך שמתקיים

$$(v_i, v_{i+1}) = (v_j, v_{j+1})$$

(כלומר אין חזרה על צלע)

4. מסילה אם היא הילוך ללא חזרה של קודקודים פרט אולי $v_1 = v_m$. כלומר אין $1 \leq i < j < m$ כך ש$v_i = v_j$ וגם לכל $1 < i < m$ מתקיים $v_i \neq v_m$.
5. מעגל אם היא מסילה ו$v_1 = v_m$.

הגדרה

אורך ההילוך\מסלול\מסילה הוא מספר הצלעות עליהן עוברים בהילוך כלומר $m-1$.

תרגיל 2

יהי $G = (V, E)$ גרף. $u, v \in V$. הוכח כי יש הילוך מu לv בG $\iff$ יש מסילה מu לv.

הגדרה

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. נגדיר יחס על הקדקדים - $u \to v$ אם קיימת מסילה מu לv.

טענה

$\to$ הוא יחס שקילות.

הוכחה

<u>סימטריות</u> - $v \to u \Leftarrow u \to v$ כי הגרף לא מכוון, לכן אפשר לקחת את המסילה ההפוכה.
<u>טרנזטיביות</u> - אם $u \to v$ ו$v \to w$ אז ע"י שרשור המסילות נקבל הילוך מu לw ולפי תרגיל 2 יש מסילה $u \to w$.
<u>רפלקסיביות</u> - מסילה באורך 0, $v \to v$.

הגדרה

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון, $\to$ היחס הנ"ל. מחלקת שקילות של קדקדים ביחס ליחס $\to$ נקראת רכיב קשירות.
סימון - $K(G)$ = מספר רכיבי הקשירות בG.

הגדרה

גרף G קשיר אם $K(G) = 1$.

הגדרה

יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט. הגרף המשלים של G מסומן $\bar{G} = (U, F)$ הוא הגרף שקבוצת קדקדיו היא $U = V$ וקבוצת הצלעות F זרה לE כך ש$(V, E \cup F)$ גרף מלא.
במילים, הצלעות של $\bar{G}$ הן בדיוק הצלעות שלא נמצאות בG.

תרגיל 3

הוכח: לכל גרף פשוט סופי G, G קשיר או $\bar{G}$ קשיר.
במילים אחרות, G לא קשיר $\Leftarrow$ $\bar{G}$ קשיר.

הגדרה

יהיו $G = (V^1, E^1)$ ו$G = (V^2, E^2)$ גרפים פשוטים.
הגרף $G \cup H$ הוא הגרף שקבוצת קדקדיו היא $V^1 \cup V^2$ וצלעותיו $E^1 \cup E^2$.
$G \cup H$ הוא איחוד זר אם $V^1 \cap V^2 = \emptyset$.

דוגמה

יהי G גרף מסדר n אזי $G \cup \bar{G} = K_n$.

תרגיל 4

גרף G הוא קשיר $\iff$ אינו איחוד זר של שני גרפים.