1.1.2011.

ברוך כץ חדר 225 /~katzmik

שעות קבלה: יום ד' 15:00-16:00 85-90% מבחן. בוחן באמצע הסמסטר.

הולכים לפי החוברת שבאתר (החוברת באנגלית).

גאומטריה אנליטית

ספירה, גאומטריה פרויקטיבית

ספירה S^2 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

הגדרה: מעגל ראשי על הספירה הינו חיתוך בין S^2 לבין מישור העובר דרך ראשית הצירים.

- דוג': קו המשווה.

שתי נקודות קובעות מעגל ראשי יחיד והמרחק ביניהן על הספירה הוא הקשת הקצרה.

העתקה antipodal $v \to -v$

הגדרה: המישור הפרויקטיבי הממשי הוא "מנה" של S^2 ע"י העתקה אנטיפודית. הוא מסומן $\mathbb{RP}^2$

אי שוויון איזופרימטרי (isoperimetric)

מעגל S^1 במישור $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}=1\}$

אורך $L=2\pi$

שטח $A=\pi$

אי שוויון איזופרימטרי: $\frac{A}{\pi}\le\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$

A שטח הכלוא בע'ק L

מעגל Riemannian

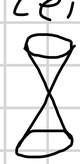
השערה של Gromov

הגדרה: מעגל רימן הינו מעגל S^1 עם מרחק מוגדר ע"י הקשת הקצרה בין שתי הנקודות (לא המיתר).

ההשערה של גרומוב מדברת על מילוי המעגל ע"י משטח. חצי ספירה שיושבת על המעגל השטח $A=2\pi$ ולא ניתן לשפר את המילוי. שטח הכי קטן.

במילוי אסור לקצר את המרחק בין שתי הנקודות

תורת היחסות של איינשטיין Einstein

קו גאודזי, עקמומיות. קונוס האור.  $x^2+y^2+z^2-t^2=0$.

אלגברה לינארית, אינדקסים.

$\mathbb{R}^n$ מרחב אוקלידי במימד n

$V, W \in \mathbb{R}^n \qquad V = \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ \vdots \\ W^n \end{bmatrix}$

$V^T = (V^1, V^2, \dots, V^n)$

מטריצה B בגודל $n \times n$

$M_{n,n}(\mathbb{R})$ מרחב של מטריצות $n \times n$

$B \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \qquad B = (b_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1..n \\ j = 1..n \end{matrix}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & \dots & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$B = (b_{ij})$

מטריצה בתור תבנית בילינארית

מגדירה תבנית בילינארית על $\mathbb{R}^n$

$B(V,W) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(V,W) \to B(V,W)$

$B(V,W) := v^t B w$

דוג'. $n=2$

$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$v^t B = (v^1 b_{11} + v^2 b_{21} \quad v^1 b_{12} + v^2 b_{22})$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{2} v^i b_{i1} \quad \sum_{j=1}^{2} v^j b_{j2}\right)$$

$$v^t B w = \sum_i v^i b_{i1} w^1 + \sum_j v^j b_{j2} w^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} v^i b_{ik} w^k$$

אינשטיין: אם יש אינדקס גם למעלה וגם למטה אז ניתן למחוק את $\sum$.

סימון חיבור של אינשטיין

$B(v,w) = b_{ij} v^i w^j$

הגדרה: נניח B מטריצה סימטרית

הערה: זאת אומרת שמתקיים $b_{ij} = b_{ji}$

אזי תבנית ריבועית המתאימה Q מוגדרת ע"י $Q(v) = B(v,v) = b_{ij} v^i v^j$

נוסחת פולריזציה. מגדירה את B מ-Q

$$B(v,w) = \frac{1}{4}\left(Q(v+w) - Q(v-w)\right)$$

$$Q(v+w) = B(v+w, v+w) = B(v,v) + B(v,w) + B(w,v) + B(w,w) =$$
$$= B(v,v) + 2B(v,w) + B(w,w)$$ בגלל הסימטריות של B

$$B(v,w) = v^t B w = (v^t B w)^t = w^t B^t v = w^t B v = B(w,v).$$

מטריצה בתור העתקה לינארית.

אנדומורפיזם

– דוג': $n=2$

$B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad v \to Bv$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$Bv = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 4b \end{bmatrix}$$

לפעמים מקצרת מרימים את האינדקסים

$B = (b^i_j)$

$Bv = \sum_{j=1}^{n} b^i_j v^j = b^i_j v^j$

$B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$w = Bv$

$w^i = b^i_j v^j$ הסכום רק על אינדקס j

$w^i = \sum_{j=1}^{n} b^i_j v^j$

עקבה של מטריצה B

$B = (b^i_j)$

$tr(B) = b^1_1 + b^2_2 + \dots + b^n_n$

$tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2$

$tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b^i_i = b^i_i$

חלק סימטרי ואנטי סימטרי

נתונה מטריצה $B = (b_{ij})$ $i,j = 1 \dots n$

חלק סימטרי S הוא $S = \frac{1}{2}(B + B^t)$

חלק אנטי סימטרי $A = \frac{1}{2}(B - B^t)$

$B = S + A$

משפט S היא מטריצה סימטרית

$S^t = \left(\frac{1}{2}(B + B^t)\right)^t = \frac{1}{2}(B + B^t)^t$
$= \frac{1}{2}(B^t + B) = S$

הגדרה: A אנטי סימטרית אם $A^t = -A$

משפט חלק אנטי סימטרי של B הוא מטריצה אנטי סימטרית

$A^t = \frac{1}{2}(B - B^t)^t = \frac{1}{2}(B^t - B) = -\frac{1}{2}(B - B^t) = -A$

$A + S = B = (b_{ij})$ $A = (a_{ij})$ $S = (s_{ij})$

$a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji})$

$s_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$

הגדרה: סימון.

$b_{\{i,j\}} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$

$b_{[i,j]} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji})$

$a_{ij} = b_{[ij]}$ $s_{ij} = b_{\{ij\}}$

הערה: B היא סימטרית אם $b_{[i,j]} = 0$

כפל מטריצה בסימון של אינדקסים

$A=(a_{ij})$ $\quad B=(b_{ij})$ $\quad C=(c_{ij})$

$A,B,C\in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$C=AB$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$c_{[ij]}=\frac{1}{2}(c_{ij}-c_{ji})=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}-\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{kj}a_{ik}-\sum_{k}b_{ki}a_{jk}\right)=\sum b_{k[j}a_{i]k}$$

$$c_{[ij]}=\sum_{k}b_{k[j}a_{i]k}$$

כפל מטריצות מגדיר הרכבה של העתקות

$\mathbb{R}^n\xrightarrow[A]{}\mathbb{R}^n\xrightarrow[B]{}\mathbb{R}^n$ $\qquad BA(v)=B(A(v))=C$ $\qquad B=(b^i_j)$

$A=(a^i_j)$

$c^i_j=b^i_k a^k_j$ $\qquad$ בסימון אינשטיין. $\qquad C=(c^i_j)$

מטריצה הופכית

$B^{-1}=(b^{ij})$ $\qquad$ אם $B=(b_{ij})$ אזי מטריצה הופכית B^{-1}

כך ש $BB^{-1}=B^{-1}B=I$ $\quad$ (I מטריצת היחידה, זהות)

נוני δ של Kronecker

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j \text{ אם}\\ 0 & i\neq j \text{ אם}\end{cases}$$

$I=(\delta^i_j)$

$b^{ik}b_{kj}=\delta^i_j$ $\qquad B^{-1}B=I$

$\delta^i_i=1+\dots+1=n$

אנדו מורכבים (אופרטורים) צמודים לעצמם, מתכבי הרמיט Hessian

2.1 ערכים עצמיים, סימטריה אין ע"ע ממשיים.

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ← סיבוב $90°$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij}) \qquad \begin{matrix} i=1 \ldots n \\ j=1 \ldots n. \end{matrix}$$

קרונקר $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

<u>הגדרה:</u> מספר ממשי λ נקרא ערך עצמי של מטריצה $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ אם"ם $\det(B-\lambda I)=0$

<u>משפט:</u> אם λ הוא ע"ע של B אזי קיים וקטור $v \neq 0$ המקיים $Bv = \lambda v$
v נקרא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ.

<u>מכפלה סקלרית:</u>
$v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} \qquad \langle v, w \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

<u>למה:</u> ניתן לכתוב מכפלה סקלרית ע"י כפל וקטורי $v \cdot w = (v^t) w$
מתקיים $(AB)^t = B^t A^t$

<u>למה:</u> מטריצה היא סימטרית אם"ם לכל $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\langle Bv, w \rangle = \langle v, Bw \rangle$$

<u>הוכחה:</u> יהיו $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Bv, w \rangle = (Bv)^t \cdot w = (v^t B^t) w$$
$$= v^t (B^t w) = \langle v, B^t w \rangle = \langle v, Bw \rangle$$

<u>מציאת ע"ע של מטריצה סימטרית</u>

<u>משפט:</u> לכל מטריצה סימטרית יש ע"ע ממשי.

<u>הוכחה:</u> תהי $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ אזי B מגדירה אינק/מורכבים $B_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$v \to Bv \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$

מצד שני $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ לכן B מגדירה העתקה $B_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$v \to Bv \qquad \forall v \in \mathbb{C}^n$

פולינום ממעלה $n \geq 1$ $\quad P_B(\lambda)$

ע"פ משפט יסודי של אלגברה, קיים שורש $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ - ש $P_B(\lambda_0) = 0$.
לכן קיים וקטור $v \in \mathbb{C}^n$ כאשר $Bv = \lambda_0 v$

ב-$\mathbb{C}^n$ יש כפל הרמיטי $\qquad \langle v,w\rangle_H = \sum_{j=1}^{n} v^j \overline{w^j}$

מתקיים $\qquad \langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle \quad \lambda\in\mathbb{C}$

$$\langle v,\lambda w\rangle = \bar\lambda\langle v,w\rangle$$

$$\langle Bv,v\rangle = \langle\lambda v,v\rangle = \lambda\langle v,v\rangle = \lambda|v|^2$$

סימטריה של מטריצה ממשית $\qquad \langle Bv,v\rangle = \langle v,Bv\rangle$

$$\langle v,Bv\rangle = \langle v,\lambda v\rangle = \bar\lambda\langle v,v\rangle = \bar\lambda|v|^2$$

לכן $\lambda|v|^2=\bar\lambda|v|^2$ לכן $\lambda=\bar\lambda$ לכן $\lambda\in\mathbb{R}$

אבל B ממשית, $\lambda\in\mathbb{R}$ ערך עצמי של B לכן קיים וקטור עצמי ממשי.

בחוברת בעמ' 19 יש הוכחה גיאומטרית.

מרחבי מכפלה פנימית ואופרטורים צמודים לעצמם

הגדרה: יהי $(V,\langle,\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית (ממשי) אנדומורפיזם $B:V\to V$ נקרא צמוד לעצמו אם מתקיים $\langle Bv,w\rangle=\langle v,Bw\rangle$ לכל $v,w\in V$

מסקנה: לכל אנדומורפיזם צמוד לעצמו של מרחב מכפלה פנימית קיים וקטור עצמי ממשי.

לכסון אורתוגונלי של מטריצות סימטריות

משפט: כל מטריצה ממשית סימטרית ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

הוכחה: אם $S\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ היא סימטרית, היא מגדירה אנדומורפיזם צמוד לעצמו $\qquad v\to Sv \quad S \quad f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n=V_1$

לכן לפי סעיף הקודם ניתן למצוא וקטור עצמי v_1 נניח $|v_1|=1$

$\mathbb{R}v_1\subset V_1$ יהי V_2 משלים אורתוגונלי של $\mathbb{R}v_1$

$$V_1=\mathbb{R}v_1\oplus V_2$$
$$n=1+(n-1)$$

התנאי $\langle f_S(v),w\rangle=\langle v,f_S(w)\rangle$ מתקיים לכל $v,w\in V_2$

לכן קיים וקטור עצמי $v_2\in V_2$ $\;|v_2|=1$ וגם $v_1\perp v_2$

ע"פ אינדוקציה נקבל $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ אורתונורמלית של וקטורים עצמיים של f_S נסמן $P=[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ אזי $P\in M_{nn}(\mathbb{R})$

כאשר P היא מטריצה אורתוגונלית ולכן מתקיים $P^{-1}=P^t$

$$PP^t=I=P^tP$$

יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ע"ע של $v_1,\dots,v_n$ נסמן $\qquad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

אזי $S=P\Lambda P^t$, נזכור ונאמר שהמטריצה של f_s היא אלכסונית ביחס לבסיס $(v_1,\dots,v_n)$

$$\mathbb{R}v_1=\{\lambda v_1 : \lambda\in\mathbb{R}\}$$

<u>סיווג של חתכי חרוט</u>

$$e=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\}$$

נסמן $S=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c\end{bmatrix}$ נסמן $X=\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$ אזי $X^tSX=ax^2+2bxy+cy^2$

<u>משפט</u>: עד כדי טרנספורמציה אורתוגונלית ניתן לכתוב כל חתך חרוט ע"י משוואה $a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f=0$.

<u>הוכחה</u>: $T=(d\ \ e)$ אזי $TX=dx+ey$ $\quad e=\{X^tSX+TX+f=0\}$

על פי משפט לכסון אורתוגונלי קיימת מטריצה P אורתוגונלית וגם מטריצה אלכסונית Λ כאשר $S=P\Lambda P^t$

$$e=\{X^tP\Lambda P^tX+TX+f=0\}$$

נסמן $X'=P^tX$ אזי $X=PX'$ ולכן

$$e=\{X'^t\Lambda X'+\overbrace{TP}^{T'}X'+f=0\}$$

$$e=\{X'^t\Lambda X'+T'X'+f=0\}$$

אם $T'=(d'\ \ e')$ וגם $X'=\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix}$ אזי

$$e=\{\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+d'x'+e'y'+f=0\}$$

<u>הבחנה</u>: אם $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ אזי e היא אליפסה $\quad x^2+y^2+f=0$

<u>הבחנה</u>: אם $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ אזי e היא היפרבולה $\quad x^2-y^2+f=0$

<u>משפט</u>: נניח $\det S\neq 0$ אזי עד כדי טרנספורמציה אורתוגונלית ניתן לכתוב את החרוט ע"י משוואה $\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+f=0$

<u>הוכחה</u>: ניתן להיפטר ממחובר $d'x'$ ע"י השלמת הריבוע $\lambda_1x'^2$ ו-$e'y'$ ע"י השלמת הריבוע $\lambda_2y'^2$. $\quad \lambda_1\neq 0 \quad \lambda_2\neq 0$

<u>הבחנה</u>: e היא פרבולה כאשר מטריצה S היא בדרגה 1 $(\lambda_1\cdot\lambda_2=0)$ האיבר הלינארי (d' או e') המתאים לע"ע המתאפס הוא שונה מאפס

- קוני: $x^2+y+f''=0$ $\quad\lambda_1=1 \quad \lambda_2=0 \quad e'=1$

או $d'\lambda_2\neq 0$ או $e'\lambda_1\neq 0$

<u>מסקנה</u>: חתך חרוט $\mathcal{C}=\{ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0\}$

הוא אליפסה אקי"ם $ac-b^2>0$ והוא היפרבולה אקי"ם $ac-b^2<0$

<u>הוכחה</u>: $\det S=\lambda_1\lambda_2$

<u>משטחים ריבועיים</u>

$M\subset\mathbb{R}^3$ הוא משטח ריבועי אם $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid P(x,y,z)=0\}$

$$P(x,y,z)=ax^2+2bxy+cy^2+2dxz+fz^2+2gyz+hx+iy+jz+k=0$$

$$S=\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & g \\ d & g & f \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad T=(h \;\; i \;\; j)$$

<u>משפט</u>: ניתן להגיע לצורה $(*)\ M=ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$

<u>הגדרה</u>: M נקראת אליפסואיד אם למקדמים a,b,c בנוסחה $(*)$ יש אותו סימן.

פרבולואיד: $z=ax^2+by^2$

פרבולואיד היפרבולי: $z=y^2-x^2$ (אוכף)

היפרבולואיד עם מכסה (דף) אחת (one sheet): $z^2=x^2+y^2-1$

היפרבולואיד of two sheets: $z=x^2+y^2+1$

<u>קריטריון של Jacobi</u>

תהי A מטריצה $n\times n$ נסמן ב-Δ_k את המינור $k\times k$ בפינה העליונה השמאלית (ראשי)

<u>משפט</u> Jacobi: תהי $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית ונניח $\Delta_k\neq 0$

לכל $1\le k\le n$ אזי A שקולה למטריצה אלכסונית (חופפת $A=P\Lambda P^t$)

לא סינגולרית

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\det(\Delta_2)}, \ldots, \frac{\det\Delta_{n-1}}{\det\Delta_n}\right)$$

<u>מסקנה</u>: תהי A סימטרית על $\mathbb{R}$ אזי A היא חיובית לחלוטין אקי"ם $\det\Delta_k>0$ לכל $1\le k\le n$

- דוג׳:

$$M=\{x^2+xy+y^2+xz+z^2+yz+x+y+z+1=0\}$$

$$S=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$$

$$\Delta_3 = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1+2\,\frac{1}{8}-3\,\frac{1}{4}>0$$

$\Leftarrow$ אלפסואיד.

עקומות ועקמומיות

Hessian של פונ'

$f(x,y)$

$f(u^1,u^2)$

$f(u^1,u^2,\dots,u^n)$

נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial u^i}$ $\quad i=1,\dots,n$

$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$

נגזרות חלקיות מסדר שני.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \quad i,j=1,\dots,n$

משפט: שיוויון של נגזרות מעורבות

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

סימון של אנטי סמטריזציה $\quad B=(b_{ij}) \quad A=(a_{ij}) \quad a_{ij}=b_{[ij]}$

סימון:

$f_i = \frac{\partial f}{\partial u^i} \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

הערה: את המשפט ניתן לבטא בצורה $f_{[ij]}=0$

$f_{[ij]} \quad \frac{1}{2}(f_{ij}-f_{ji})=0$

$f_{ij}=f_{ji}$

הגדרה: גרדיאנט של $f(x,y)$ היא

$$\underset{\text{nabla}}{\vec{\nabla}} f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

דוג':

$p=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

הגדרה: נק' קריטית של f היא נק' p כאשר $\nabla f(p)=\vec{0}$ במילים אחרות

$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$

דוג':

$f(x,y)=y^2-x^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ +2y \end{pmatrix} = 0$$

$-2x=0 \quad 2y=0.$

$x=0 \quad y=0$

הנק' הקריטית היא ראשית הצירים.

הגדרה: ההסיאן H_f של פונ' $f(x,y)$ היא מטריצה

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = H_f(x,y)$$

באופן יותר כללי אם $f(u^1, \dots, u^n)$

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) \qquad i,j = 1, \dots, n$$

הערה: H_f היא מטריצה סימטרית

- דוג':

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0.$$

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

הערה: $\det H_f$ היא עקמומיות של גאוס.

- דוג':

$$\det H_f = -2 \cdot 2 = -4 < 0 \quad \Rightarrow$$ נק' אוכף

פרבולואיד

$$z = x^2 + y^2$$

$$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H_f = 4 > 0$$

נקודת מינימום.

היפרבולואיד

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2+y^2+1 - x^2}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1+x^2}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$$

$$H_f = (x^2+y^2+1)^{3/2} \begin{bmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{bmatrix}$$

$$\det H_f(0,0) = 1 > 0$$ קמור.

עקומות

קיימות שתי גישות פרמטרית וסתומה.

בגישה הפרמטרית: $\alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t)) \quad t\in[a,b]$

$x(t)=\alpha^1(t) \quad y(t)=\alpha^2(t)$

$\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall t \quad \alpha(t)=(x,y)\}$

שינוי של פרמטר $t=t(s)$ נקבל פרמטריזציה חדשה של אותה עקומה.

$\beta(s)=\alpha(t(s))=\alpha\circ t(s)$

הצגה סתומה: כאשר F גזירה $F(x,y)=0$

$C_F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid F(x,y)=0\}$

- דוג': מעגל ברדיוס $R>0$ $\quad F(x,y)=x^2+y^2-R^2$

$x^2+y^2=R^2$

$y=\sqrt{-x^2+R^2}$ הגרף הוא רק חצי מעגל.

פרמטריזציה $\alpha^1(t)=t$

$\alpha^2(t)=\sqrt{R^2-t^2}$

פרמטריזציה של החצי העליון $\alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t))$

- דוג': לא ניתן למצוא פרמטריזציה באזור הראשית. $f(x,y)=xy$

משפט: פונ' סתומה

תהי $f(x,y)$ פונ' C^∞ נניח $\nabla f(p)\neq 0$ אזי קיימת פרמטריזציה $(\alpha^1(t),\alpha^2(t))$ של C_F בסביבה של נק' p

משפט: נניח ש F מקיימת $\frac{\partial F}{\partial y}(p)\neq 0$ אזי קיימת פרמטריזציה $y=y(x)$

במילים אחרות $\alpha(t)=(t,\alpha^2(t))$ של C_F מסביבה של p

פרמטריזציית "אורך הקשת" (במהירות יחידה) arclength המהירות=1

הגדרה: $\alpha(t)$ היא פרמטריזציה במהירות יחידה אם $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|=1$

במילים אחרות $\sqrt{\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2}=1 \qquad \left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2=1.$

- דוג':

$x^2+y^2=R^2$

$\alpha(s)=\left(R\cos\frac{s}{R},R\sin\frac{s}{R}\right)$

$\alpha'(s)=\left(-\sin\frac{s}{R},\cos\frac{s}{R}\right) \qquad \alpha'(s)=\sqrt{\sin^2\frac{s}{R}+\cos^2\frac{s}{R}}=1$

עקמומיות גאודזית של עקומה

הגדרה: נניח $\alpha(s)$ פרמטריזציה במהירות יחידה של עקומה אזי עקמומיות $k_\alpha(s) \geq 0$ של α היא

$$k_\alpha(s) = \left|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right|$$

- דוג׳: מעגל ברדיוס $R>0$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{R}\sqrt{\cos^2\frac{s}{R} + \sin\frac{s}{R}} = \frac{1}{R} = k_\alpha(s).$$

מעגל אוסקולטורי

קירוב מסדר 1 ישר המשיק

קירוב מסדר 2 מעגל אוסקולטורי

תזכורת: $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

הגדרה חלופית.

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

- דוג׳:

$$f(x) = ax^2 \qquad f''(x) = 2a$$

$$f''(x) \approx \frac{a(x+h)^2+a(x-h)^2-2ax^2}{h^2} = \frac{ax^2+2axh+ah^2+ax^2-2axh+ah^2-2ax^2}{h^2} = 2a.$$

הגדרה: מעגל אוסקולטורי של עקומה $\alpha(s)$ היא מעגל העובר דרך שלוש נקודות $\alpha(x+h)$, $\alpha(x)$, $\alpha(x-h)$ קרובות אחת לשניה במידה אינסופית (h אינפיניטסימלי)

משפט: עקמומיות של מעגל אוסקולטורי בנק׳ שווה לעקמומיות של עקומה $\alpha(s)$ המקורית

רדיוס של עקמומיות

Cauchy 1826.

מרכז של עקמומיות הוא נק׳ חיתוך בין שני נורמלים קרובים במידה אינסופית.

המרחק בין הנק׳ למרכז זה הרדיוס של העקמומיות

הגדרה: רדיוס של עקמומיות בנק׳ $p \in C$ הוא המרחק בין p לבין נק׳ החיתוך של שני נורמלים בנק׳ קרובות במידה אינסופית.

אופרטורים מסדר שני

הגדרה: אופרטור לפלס שטוח Δ_0 מוגדר ע"י

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

-קונ': אם $F(x,y)$ גזירה פעמיים אזי

$$\Delta_0 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad \Delta_0 : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

בסימונים $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$

$$\Delta_0 F = F_{xx} + F_{yy}$$

-קונ': אם

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

$$\Delta_0 F = 2 + 2 = 4.$$

הגדרה: אופרטור של Bateman

$$D_B(F) = F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2$$

$$D_B(F) = -\det \begin{bmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

עקמומיות בהצגה סתומה

משפט: נניח $\nabla F(p) \neq 0$ אזי עקמומיות של C_F בנק' p היא

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

-קונ':

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

$$F_x = 2x \qquad F_y = 2y \qquad \nabla F = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \qquad \nabla F = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

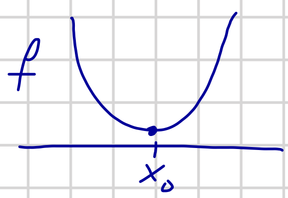
$$F_{xx} = 2 \qquad F_{xy} = 0 \qquad F_{yy} = 2$$

$$D_B(F) = 2 \cdot (2y)^2 - 2 \cdot 0 + 2(2x)^2 = 8y^2 + 8x^2$$

$$k = \frac{8(x^2+y^2)}{(2\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{8(x^2+y^2)}{8(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{R}$$

אורך הקשת

משפט: תהי x_0 נק' קריטית של $f(x)$ נתבונן בגרף של f
אזי עקמומיות של הגרף ב $(x_0, f(x_0))$ היא $|f''(x_0)|$



הוכחה: פרמטריזציה של הגרף $(t, f(t))$

$$(1, f'(t)) \to \sqrt{1+(f'(t))^2} \geq 1$$

$$(0, f''(t))$$ לכן זו לא הוכחה מספקת.

נניח $y=f(x)$, נגדיר $F(x,y)=y-f(x)$

$$F_x=-f'(x) \quad F_y=1 \quad F_{xy}=0 \quad F_{yy}=0. \quad F_{xx}=-f''(x)$$

$$|D_B(F)|=|f''(x)|$$

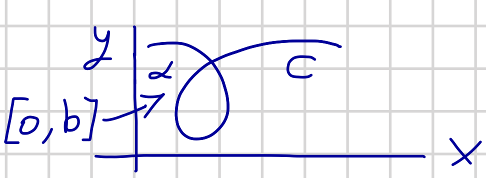
$$\nabla F = \begin{bmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\nabla F(x_0)| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 1$$

$$K = \frac{|f''(x_0)|}{1} = f''(x_0)$$

קיום פרמטריזציה במהירות יחידה

משפט: נניח שעקומה $\alpha(t)$ מקיימת $\alpha'(t)\neq 0$ בכל נק' (עקומה רגולרית) אזי קיימת פרמטריזציה, אורך הקשת של אותה עקומה גאומטרית C במהירות יחידה.



קונ':

$$x=t^3 \qquad y=t^2$$

$$\alpha(t)=(t^3, t^2)$$

$$|\alpha'(0)|=0$$ לא מקיים.

הוכחה: מוטיבציה.

$$\alpha(t) \qquad t=t(s)$$

$$\beta(s)=\alpha(t(s))=\alpha\circ t(s)$$

$$\beta'(s)=\frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad 1=|\beta'(s)|=\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|} \qquad \frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|$$

$$s(t)=\int_0^t \left|\frac{d\alpha}{d\mu}\right| d\mu$$

פורמלית: נניח $s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\alpha}{d\mu}\right| d\mu$ לכן $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| > 0$

לכן $s(t)$ היא פונ' עולה במשתנה t לכן קיימת פונ' הפכית $t = t(s)$

המקיימת $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|} \neq 0$

לפי הנחה.

נגדיר $\beta(s) = \alpha(t(s))$

נוכיח שהיא במהירות יחידה.

$$|\beta'(s)| = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \frac{dt}{ds} = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \frac{1}{\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|} = 1$$

עקמומיות ביחס לפרמטר כלשהו

משפט: ביחס לפרמטר שרירותי t, עקמומיות של עקומה

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

היא

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|\alpha'|^3} \qquad |\alpha'| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

- קוגי: נניח שמדובר בפרמטר טבעי t אזי $|\alpha'(t)| = 1$ $\quad x'^2 + y'^2 = 1$

$$\kappa_\alpha(t) \stackrel{?}{=} |x'y'' - y'x''|$$

$$\kappa_\alpha(t) = |\alpha''(t)| = \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2}$$

$$2x'x'' + 2y'y'' = 0$$

$$\frac{x'}{y'} + \frac{y''}{x''} = 0$$

$$|x'y'' - y'x''| = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

$$(x'y'' - y'x'')^2 = x''^2 - y''^2$$

$$x'^2y''^2 + y'^2x''^2 - 2x'y'x''y'' = x''^2 + y''^2$$

$$y''^2 - y'^2y''^2 + x''^2 - x'^2x''^2 - 2x'y'x''y'' = x''^2 - y''^2$$

$$-y'^2y''^2 - x'^2x''^2 - 2x'y'x''y'' = -(x'x'' + y'y'')^2 = 0$$

עקומות Jordan קמורות במישור ופרמטרס

$\alpha(s)$ פרמטריזציה במהירות יחידה של עקומה C

$|\alpha'(s)| = 1$

$\alpha(s) = x(s) + iy(s)$ $\qquad \alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\qquad z \in \mathbb{C}$

$x'^2 + y'^2 = 1$ $\qquad v : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\qquad z = x + iy$

$\alpha'(s) = v(s) = x'(s) + iy(s)$

$V(s)=r(s)\,cis(\theta(s))$

$r(s)=|V(s)|$

$cis(s)=\cos\theta(s)+i\sin(\theta(s))$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=cis\,\theta$

עקמומיות באמצעות θ

משפט: מתקיימת נוסחה הבאה לגבי עקמומיות $k_\alpha(s)$

$$k_\alpha(s)=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

הוכחה: $k(s)=|\alpha''(s)|$ לכן $k(s)=|V'(s)|$

$$k(s)=\left|\left(e^{i\theta(s)}\right)'\right|=\left|ie^{i\theta(s)}\frac{d\theta}{ds}\right|=|i|\left|e^{i\theta}\right|\left|\frac{d\theta}{ds}\right|=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

$$tg\,\theta=\frac{y'}{x'}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{x'y''-y'x''}{(x')^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x'y''-y'x''}{\left(\frac{x'}{\cos\theta}\right)^2}=\frac{x'y''-y'x''}{|\alpha'|^2}\qquad \alpha'=V=\frac{x'}{\cos\theta}$$

$$\frac{\frac{d\theta}{ds}}{\underbrace{\left(\frac{dt}{ds}\right)}_{=V}}=\frac{x'y''-y'x''}{|\alpha'|^2}$$

הגדרה: עקומת Jordan C היא קמורה (במובן המוחלט) אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים

I כל קטע המקשר שתי נק' של C נמצא בתחום בתוך C

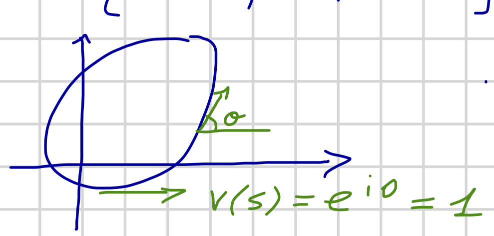
II נתבונן בישר המשיק ל-C בכל נק' $p\in C$ אזי המשלים $C\setminus\{p\}$ נמצא לגמרי בתוך חצי מישור בתחת המוגדר ע"י הישר המשיק, כלומר, $C\cap T_p=\{p\}$

משפט: נניח שעקומת Jordan C היא קמורה (במובן המוחלט)

אזי העתקה $V(s): C\to S^1$ היא חח ערכית ועל

הוכחה: אם $\alpha(s)$ היא פרמטריזציה של C אזי $V(s)=\alpha'(s)$ הוא וקטור משיק

$V(s)=e^{i\theta(s)}$ $\quad |V(s)|=1$ $\quad S^1=\{e^{i\theta}\mid \theta$ ממשי$\}$



נתבונן בנק' של C עם חלק מקומה (y) מינימלי ומקסימלי.

לפי משפט של Rolle הוקטורים המשיקים

בנק' אלו מצביעים עם ערך זוית θ שווה 0 ו-π

ערכים אחרים של θ ניתן לקבל ע"י סיבוב של העקומה בזוית θ- וישום

תוצר של משפט Rolle

נשאר להבין שההעתקה חז חד ערכית. נוכיח בשלילה.

נניח שבשתי נקודות p,q מקבלים אותה זוית θ ונתבונן במשיקים

לפי הגדרה של עקומה קמורה C נמצאת לגמרי בחצי מישור מוגדר ע"י T_p

וגם לגמרי בחצי מישור המוגדר ע"י T_q ו- T_p מקביל T_q

לכן בהכרח $T_p=T_q$ ולכן $p=q$

עקמומיות טוטאלית של עקומת Jordan קמורה

הגדרה: עקמומיות טוטאלית (Total curvature) הוא אינטגרל של עקמומיות

$$\int_C k_\alpha(s)\,ds$$

משפט: עקמומיות טוטלית של כל עקומת Jordan הקמורות הוא 2π.

הוכחה: כב מטריזציה $\alpha(s)$ נניח שנק' $\alpha(0)$ היא הנק' הנמוכה ביותר של C

נניח $v(s)=\alpha'(s)$ אז $v(0)=e^{i0}=1$ וגם $\theta(0)=0$ לכן הזוי' $\theta(s)$ היא פונ' עולה בין 0 ל-2π לפי המשפט הקודם. לכן

$$\int_C k(s)\,ds=\int_C\left|\frac{d\theta}{ds}\right|ds=\int_C\frac{d\theta}{ds}\,ds=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

אם $v(s)=e^{i\theta(s)}$ אז $n(s)=ie^{i\theta(s)}$ $\quad n(s):C\to S^1$

$$\frac{dn}{ds}=i\frac{dv}{ds}\qquad\left|\frac{dn}{ds}\right|=\left|\frac{dv}{ds}\right|=k(s)$$

$$\int_C k(s)\,ds=\int_C\left|\frac{dn}{ds}\right|ds=\int_C\frac{d\theta}{ds}\,ds=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi.$$

מעגל דרך העתקה אקספוננציאלית

שריג ב- $\mathbb{R}^b$, $b>0$

תחום יסודי של שריג

$b=1$ $\quad L\subset\mathbb{R}$ כל שריג נפרש על ידי מספר $\alpha>0$ $\quad L_\alpha\subset\mathbb{R}$ תת חבורה חיבורית

$$L_\alpha=\alpha\mathbb{Z}=\{\dots,-2\alpha,-\alpha,0,\alpha,2\alpha,\dots\}=Span_{\mathbb{Z}}(\alpha)$$

תחום יסודי של L_α הוא למשל $[0,\alpha]$ מנה $\mathbb{R}/L_\alpha$

משפט: חבורת מנה $\mathbb{R}/L_\alpha$ היא איזומורפית למעגל היחידה S^1

הוכחה: נתבונן בהעתקה $\hat\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$ $\quad x\to e^{\frac{i2\pi x}{\alpha}}$

אזי $\hat\phi$ הוא הומומורפיזם $(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ $\quad \hat\phi(x+y)=\hat\phi(x)\hat\phi(y)$

שימו לב שמתקיים $\hat\phi(x+\alpha m)=\hat\phi(x)$ לכל $m\in\mathbb{Z}$ לכן $\ker(\hat\phi)=\alpha\mathbb{Z}=L_\alpha$

לפי משפט איזומורפיזם 1 מקבלים מונומורפיזם $\phi: \mathbb{R}/L_\alpha \to \mathbb{C}^*$

כאשר $Im(\phi)=S^1$ לכן. $\hat{\phi}: \mathbb{R}/L_\alpha \to S^1$ איזומורפיזם.

שריגים טורוסים יחס של Clairaut

שריג ותחום יסודי

$Z=re^{i\theta}$

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$\theta\to e^{i\theta}$

$\ker(\varphi)=\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots\}$

$L_{2\pi}=2\pi\mathbb{Z}$ שריג

$S^1=\mathbb{R}/L_{2\pi}$

$\mathbb{R}^b$

הגדרה: $L\subset\mathbb{R}^b$ הוא שריג אם L נפרש ע"י b וקטורים בת"ל $v_1,\dots,v_b$

$L=\mathbb{Z}v_1+\mathbb{Z}v_2+\dots+\mathbb{Z}v_b$

$L=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(v_1\dots v_b)=\{n_1v_1+\dots+n_bv_b\in\mathbb{Z}\}$

הגדרה: מסלול (orbit) של נקודה $x_0\in\mathbb{R}^b$ תחת שריג L הוא אוסף נק' $\{x_0+l \mid l\in L\}$

הגדרה: המנה $\mathbb{R}^b/L$ נקראת טורוס b-מימדי.

הגדרה: תחום יסודי של טורוס $\mathbb{R}^b/L$ הוא קבוצה סגורה $F\subset\mathbb{R}^b$ המקיימת 3 תנאים:

I כל מסלול נפגש עם F בנק' אחת לפחות

II כל מסלול נפגש עם פנים של F $(\mathring{F})$

III השפה ∂F היא בעלת $\underbrace{\text{נפח } b\text{-מימדי}}_{\text{מידת Lebesgue}}$ אפס

- דוג': $S^1=\mathbb{R}/L_{2\pi}$ תחומים יסודיים $[0,2\pi]$

$[-\pi,\pi]$

$[1,2\pi+1]$

$[-\pi,0]\cup[2\pi,3\pi]$

- דוג': מקבילון (parallelepiped) סגור נפרש ע"י $\{v_1,\dots,v_b\}$ הוא תחום יסודי של $L\subset\mathbb{R}^b$ $L=\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_b)$

- דוג': שריג של גאוס ב-$\mathbb{R}^2$ e_1,e_2 פורשים שריג L_G $L_G=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$

תחום יסודי יחידה $F=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

הגדרה/משפט: נפח יסודי של טורוס $\mathbb{R}^b/L$ הוא נפח של תחום יסודי F שלו.

שריגים במישור

$b=2$ כל שריג $L\subset\mathbb{R}^2$ נפרש ע"י 2 וקטורים — $L=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(v,w)$

$L=\mathbb{Z}v+\mathbb{Z}w$

- דוג': $v=\alpha e_1$ $\quad w=\beta e_2$

$L_{\alpha,\beta}=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(\alpha e_1,\beta e_2)$

- דוג': שריג של Eisenstein

$L_E\subset\mathbb{C}$

$L_E=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(1,e^{i\frac{\pi}{3}})$

$\psi=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

טורוס $\mathbb{R}^2/L_E$ מה הנפח/שטח של $\mathbb{R}^2/L_E$? הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$

מינימומים עוקבים של שריג

Successive minimal

$L\subset\mathbb{R}^b$

הגדרה: המינימום העוקב הראשון $\lambda_1(L)$ הוא $\lambda_1(L)=\min\{|v|: v\in L\setminus\{0\}\}$

משפט: יהי $L\subset\mathbb{R}$ שריג אזי מעגל $\mathbb{R}/L$ מקיים $\mathrm{length}(\mathbb{R}/L)=\lambda_1(L)$

$\lambda_1(L)=\min\{\lambda\in\mathbb{R} : \exists\, v_1\overset{\in L}{\neq} 0 : |v_1|\leq\lambda\}$

הגדרה: יהי $k=1,\dots,b$ נגדיר את המינימום העוקב ה-k

$\lambda_k(L)=\min\{\lambda\in\mathbb{R} : \exists\, v_1,\dots,v_k$ בת"ל, $|v_i|\leq\lambda\}$

- דוג': $k=2$ נניח $b\geq 2$ תהי $S=\{v,w\}$ $\quad v,w\in L$ נניח $|S|=\max(|v|,|w|)$

$\lambda_2(L)=\min_S\{|S| : \{v,w\}\in L$ בת"ל$\}$

מטריצת Gram

הגדרה: $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subset\mathbb{R}^b$ כאשר $n\leq b$ מטריצת Gram

$\mathrm{Gram}(S)=(\langle v_i,v_j\rangle)_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$

- דוג':

$$\begin{bmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle\\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle\end{bmatrix}$$

משפט: $n=b$ נפח של טורוס $\mathbb{R}^n/L$ הוא שורש של דטרמיננטת מטריצת Gram

(נפח) $\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^n/L)=\sqrt{\det(\mathrm{Gram}(S))}$

כאשר $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$ ואז $L=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(S)$

הוכחה: נגדיר מטריצה A ע"י $A=[v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$

יהי P מקבילון מוגדר ע"י $v_1,\dots,v_n$ $\quad \mathrm{Vol}(P)=|\det A|$

אבל $\mathrm{Gram}(S)=A^tA$ $\quad \det(\mathrm{Gram}(S))=\det A^tA=\det A^t\det A=(\det A)^2=\mathrm{Vol}(P)^2$

$Vol(\mathbb{R}^n/L)=\sqrt{Gram(S)}$ אבל P הוא תחום יסודי של הטורוס לכן

<u>ספירה וטורוס בתור משטח טופולוגי</u>

$g=0$ ספירה S^2 $g=3$ שלוש ידיות genus

<u>משפט:</u> טורוס דו מימדי אפשר להגדיר ב-4 דרכים שקולות.

I מנה $\mathbb{R}^2/L$ כאשר $L\subset\mathbb{R}^2$ הוא שריג

II משטח סיבוב המתקבל כשמתחילים עם מעגל $(x-2)^2+z^2=1$ במישור (x,z) ומסובבים אותו סביב ציר z

III כפל קרטזי של שני מעגלים $S^1\times S^1$

IV יריעה דו מימדית קומפקטית בלי שפה ב-genus אחד.

<u>קבוע של Hermite</u>

<u>הגדרה:</u> קבוע γ_b של הרמיט מוגדר בשני אופנים שקולים:

I γ_b היא ריבוע של המינימום העולה הראשון מקסימלי בין כל שריגי L כאשר $Vol(\mathbb{R}^b/L)=1$

γ_b מוגדר ע"י נוסחא

$$\gamma_b^{\frac{1}{2}}=\sup\left\{\frac{\lambda_1(L)}{Vol(\mathbb{R}^b/L)^{\frac{1}{b}}}:L\subset\mathbb{R}^b\right\}$$

<u>תחום יסודי סטנדרטי</u>

<u>הגדרה:</u> תחום יסודי סטנדרטי D הוא קבוצה.

$$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\geqslant 1 \quad |Re(z)|\leqslant\tfrac{1}{2},\ Im(z)>0\}$$

<u>למה:</u> אם נכפיל שריג $L\subset\mathbb{C}$ במספר מרוכב שונה מאפס נקבל שריג חדש עם אותו ערך של מנה $\dfrac{\lambda_1(L)^2}{\text{area}(\underbrace{\mathbb{C}/L}_{\text{טורוס}})}$

<u>הוכחה:</u> מספר מרוכב $re^{i\theta}$ פה כפל ב-$e^{i\theta}$ הוא סיבוב במישור בזווית θ אבל סיבוב הוא איזומטריה השומרת גם אורך וגם שטח. מצד שני כפל בממשי r. הוא מכפיל λ_1 ב-r ומכפיל שטח ב-r^2 לכן המנה $\dfrac{\lambda_1^2}{\text{area}}$ נשארת בלי שינוי

$$\frac{\lambda(rL)^2}{\text{area}(\mathbb{C}/rL)}=\frac{(r\lambda_1(L))^2}{r^2\,\text{area}(\mathbb{C}/L)}=\frac{\lambda_1(L)^2}{\text{area}(\mathbb{C}/L)}$$

<u>פרמטר קונפורמי τ של שריג</u>

<u>משפט:</u> נניח $b=2$ אזי קבוע הרמיט הוא $\gamma_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$ השריג המתאים הוא פרופורציונאלי לשריג של Eisenstein

הוכחה: $L\subset\mathbb{C}$ בחר וקטור $v\in L$ קצר ביותר במילים אחרות $|v|=\lambda_1(L)$

נתבונן בשריג החדש $\frac{1}{v}L$

$v^{-1}L$ הוא שריג חדש לכן וקטור $1\in\mathbb{C}$ הוא וקטור קצר ביותר

נסמן את השריג החדש ב- L גם $\lambda_1(L)=1$ וגם $1\in L$

נשלים 1 לבסיס של L $\{\tilde{\tau},1\}\subset L$ ונתבונן בחלק הממשי $Re(\tilde{\tau})$

$\tau=\tilde{\tau}-k$ מקיים $-\frac{1}{2}\leqslant Re(\tau)\leqslant\frac{1}{2}$ $|\tau|\geqslant 1$, $k=[Re(\tilde{\tau})+\frac{1}{2}]$

בסיס חדש ל- $\{\tau,1\}\subset L$

כאשר $\tau\in D$, $\tau\in L$ $|\tau|\geqslant\lambda_1(L)=1$ לכן $|\tau|\geqslant 1$

$$|Re(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}$$

$$Im(\tau)=\sqrt{|\tau|^2-Re(\tau)^2}\geqslant\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$area(\mathbb{C}/L)=Im(\tau)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

לכן

$$\frac{\lambda_1(L)^2}{area(\mathbb{C}/L)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

מצד שני שריג Eisenstain L_E מקיים $\frac{\lambda_1(L)^2}{area}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

לכן $\gamma_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (Hermite)

בשריג של גאוס $\tau=i$

בשריג איזנשטיין $\tau=e^{i\frac{\pi}{3}}$

הגדרה: מספר $\tau\in D$ כאשר $L=Span(\tau,1)$ נקרא פרמטר קונפורמי של הטורוס $\mathbb{C}/L$

מעגל ראשי על הספירה ויחס Clairaut

הגדרה: יחס Clairaut $r(t)\cos\gamma(t)=Const$

r המרחק של נק' על מעגל ראשי.

γ הזוית בין המעגל הראשי למעגל רוחב בנק'

ספירה יחידה $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ היא $S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$

מישור P דרך ראשית הצירים $ax+by+cz=0$ כאשר $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

הגדרה: מעגל ראשי G (Great Circle) של S^2 הוא חיתוך $G=S^2\cap P$

דוג': אם P הוא מישור (x,y) $P=\{(x,y,z)\mid z=0\}$

אז מקבלים פרמטריזציה של קו המשווה ע"י $\alpha(t)=\cos t\, e_1+\sin t\, e_2=\begin{bmatrix}\sin t\\\cos t\\0\end{bmatrix}$

באופן יותר כללי כל מעגל כאשי הוא ניתן לפרמטריזציה על ידי

$\cos t\, v + \sin t\, w$

כאשר (v,w) הוא בסיס אורתונורמלי של מישור P

- דוג׳: קואורדינטות במישור

$x = r\cos\theta$

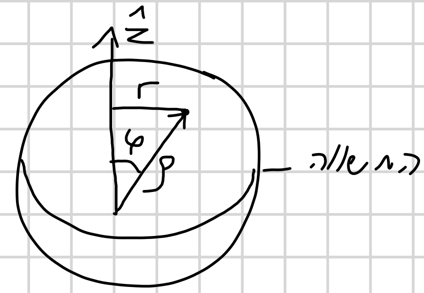
$y = r\sin\theta$

על הספירה הקואורדינטות הן (ρ,θ,φ)

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$tg\,\theta = \frac{y}{x}$

$r = \rho\sin\varphi$



מיתוס Claraut לשטחים

מעגלים ראשיים ויחס Clairaut

למה: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ נניח שאיבר $\alpha\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ הוא פרימיטיבי נאמרת אם $\alpha=(a,b)$
אז $\gcd(a,b)=1$ אזי קיימים $m,n\in\mathbb{Z}$ כאשר $am+bn=1$

Chinese Remainder theorem

$\beta=\binom{m}{-n}$ $\det[\alpha,\beta]=1$ α,β בסיס של $\mathbb{Z}$.

כדוריות (ρ,θ,φ) ρ אורך, φ זווית עם ציר $\hat{z}$ ו-θ זווית היטל על $[xy]$ עם ציר $\hat{x}$.

למה: כפל סקלרי של פוני וקטוריות $f(t),g(t)$ מקיים כלל Leibniz

$$<f,g>'=<f',g>+<f,g'>$$

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t)) \qquad g(t)=(g_1(t),g_2(t))$$

$$<f,g>=f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}(<f,g>)=\frac{d}{dt}(f_1(t)g_1(t)+f_2(t)g_2(t))$$
$$=f_1'(t)g_1(t)+f_1(t)g_1'(t)+f_2'(t)g_2(t)+f_2(t)g_2'(t).$$

למה: $\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ עקומה.
אזי וקטור משיק $\alpha'(t)$ הוא מאונך לרדיוס וקטור של נקודה על העקומה

$$<\alpha(t),\alpha'(t)>=0$$

הוכחה: לפי הגדרה של הספירה $|\alpha(t)|=1$ $|\alpha(t)|^2=1$ $<\alpha(t),\alpha(t)>=1$
נגזור לפי t.

$$\frac{d}{dt}<\alpha(t),\alpha(t)>=\frac{d}{dt}(1)=0.$$

אבל לפי כלל Libniz

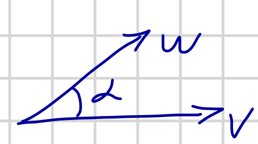
$$<\frac{d\alpha}{dt},\alpha>+<\alpha,\frac{d\alpha}{dt}>=0=2<\frac{d\alpha}{dt},\alpha>$$

חוק סינוסים ספירי.

במישור $$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

על ספירה $$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

$v,w\in\mathbb{R}^3$



$$<v,w>=|v||w|\cos\alpha$$

$$\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1 \qquad \sqrt{w_1^2+w_2^2}=1.$$

$v=(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ $\qquad$ $w=(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$

כאשר הוורק 1.

$$\langle v,w\rangle = \cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$=\cos\theta_1\cos(-\theta_2)-\sin\theta_1\sin(-\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_2-\theta_1)=\cos\alpha$$

$$\alpha=\arccos(\langle v,w\rangle).$$

<u>הגדרה:</u> קו אורך הוא מעגל ראשי העובר דרך קוטב צפוני.

<u>למה:</u> נניח G מעגל ראשי על הספירה G לא קו אורך.

נניח $p\in G$ נקודה עם קואורדינטה z מקסימלית אזי מתקיים

I בנק' p G מאונך לקו אורך דרך p

II G משיק משיק לקו רוחב דרך p.

<u>הוכחה:</u> נניח $\alpha(t)$ פרמטריזציה של G כאשר $\alpha(0)=p$

כוני $\langle\alpha(t), e_3\rangle$ מקבלת מקסימום בנק' $t=0$. לכן $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle\alpha(t),e_3\rangle=0$

$$\langle\frac{d\alpha}{dt}, e_3\rangle+\langle\alpha(t), \overbrace{\frac{d}{dt}e_3}^{0}\rangle=0.$$

$$\langle\frac{d\alpha}{dt}, e_3\rangle=0$$

$$\langle\frac{d\alpha}{dt}, p\rangle=0$$ לפי למה הקודמת.

לכן וקטור משיק $\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=0}$ הוא מאונך למישור $Sp\{e_3,p\}$

אבל וקטור משיק של קו האורך נמצא במישור $Sp\{e_3,p\}$

לכן $\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=0}$ מאונך לקו האורך.

<u>קואורדינטות ספיריות</u>

קו רוחב על S^2 הוא $\varphi(t)=const=\varphi_0$.

קו אורך. $0\le t\le\pi$. $\theta=Const$ $\quad\varphi(t)=t$

$S^2=\{\rho=1\}$.

<u>משפט:</u> Clairout תהי $\alpha(t)$ פרמטריזציה של.

מעגל ראשי G על $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ נסמן ב- $r(t)$ מרחק בין $\alpha(t)$ לציר $\hat{z}$

נסמן ב- $\gamma(t)$ הזוית בין $\alpha'(t)$ לבין וקטור משיק של קו רוחב דרך $\alpha(t)$

אזי מתקיים יחס Clairaut $\quad r(t)\cos\gamma(t)=Const$

כאשר $Const=r_{min}$ הוא מרחק מינימום בין $\alpha(t)$ לציר $\hat{z}$.

הוכחה: לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{\sin\varphi(\alpha(t))}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\varphi_{min}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\gamma(t))}$$

$$\sin\varphi(\alpha(t))\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma(t)\right)=\sin\varphi_{min}$$

$$\sin\varphi(\alpha(t))\cos\gamma(t)=\sin\varphi_{min}$$

$z=\cos\varphi$

$$r(t)\cos\gamma(t)=r_{min}.$$

$r=\sin\varphi$ (פולרי).

משוואה דיפרנציאלית של מעגל ראשי

(ρ,θ,φ) $\quad S^2=\{\rho=1\}$

(θ,φ) $\quad \varphi=\varphi(\theta).$

משפט: מעגל ראשי G מקיים

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2=\frac{1}{const^2}$$

כאשר $r=\sin\varphi$ ואילו $const=\sin\varphi_{min}$

הוכחה:

$d\varphi=ds\sin\gamma$ $\quad ds^2=d\varphi^2+r^2d\theta^2$

$rd\theta=ds\cos\gamma$ $\quad rd\theta\, tg\gamma=d\varphi$ $\quad tg\gamma=\frac{d\varphi}{rd\theta}$

$$\cos^2\gamma=\frac{1}{1+tg^2\gamma}=\frac{1}{1+\left(\frac{d\varphi}{rd\theta}\right)^2}$$

$$r\cos\gamma=const$$

$$r^2\cos^2\gamma=const^2$$

$$\frac{r^2}{1+\left(\frac{d\varphi}{rd\theta}\right)^2}=const^2$$

$$\frac{r^2}{const^2}=1+\left(\frac{d\varphi}{rd\theta}\right)^2$$

$$\frac{1}{const^2}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 \qquad r=\sin\varphi$$

$$\frac{1}{const^2}=\frac{1}{\sin^2\varphi}+\frac{1}{\sin^4\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2$$

תאוריה מקומית (בסביבה של נק') של משטחים

משטח רגולרי של Jacobian

$x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad x:U\to\mathbb{R}^3$

פרמטריזציה של M

כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוח.

$$x(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$$

הגדרה: Jacobian של x הוא מטריצה.

$$J_x=\left[\frac{\partial x}{\partial u_1},\ \frac{\partial x}{\partial u_2}\right]$$

$$(x^1,x^2,x^3)=(x,y,z) \qquad J_x=\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2}}$$

$$\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{matrix}$$

<u>הגדרה:</u> פרמטריזציה של X נקראת רגולרית אם מתקיימים 2 תנאים שקולים.

וקטורים $\frac{\partial X}{\partial u^1}$ $\frac{\partial X}{\partial u^2}$ הם בת"ל

מטריצה J_x היא בדרגה 2, $rank(J_x)=2$ בכל נק' של M

-דוג': יהי $r>0$

אצי גרף של f הוא

$$f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$X(u^1,u^2)=(u^1,u^2,f(u^1,u^2))$$

$$\frac{\partial X}{\partial u^1}=(1,0,f_x)^t$$

$$\frac{\partial X}{\partial u^2}=(0,1,f_y)^t$$

$$J_x=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ f_x & f_y\end{bmatrix} \qquad rank\, J_x=2.$$

$$f_x=\frac{-x}{f} \qquad f_y=\frac{-y}{f}$$

לכן X פרמטריזציה רגולרית.

<u>התבנית היסודית הראשונה של משטח.</u>

נסמן ב- $<,>$ מכפלה סקלרית של $\mathbb{R}^3$

תהי $\underline{X}(u^1,u^2)$ פרמטריזציה של משטח, רגולרית.

לכל אינדקס $i=1,2$ $j=1,2$ נגדיר מקדם

$$g_{ij}(u^1,u^2)=\left<\frac{\partial X}{\partial u^i},\frac{\partial X}{\partial u^j}\right>$$

הערה: $g_{ij}=g_{ji}$

$$g_{ij}=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}$$

g_{ij} מקדמים מטריים של המשטח ב- $\mathbb{R}^3$

-דוג': גרף של $\sqrt{r^2-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial X}{\partial u^1}=\begin{matrix}1\\0\\-\frac{x}{f}\end{matrix} \qquad \frac{\partial X}{\partial u^2}=\begin{matrix}0\\1\\-\frac{y}{f}\end{matrix}$$

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}1+f_x^2 & f_xf_y\\ f_xf_y & 1+f_y^2\end{bmatrix}$$

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}1+\left(\frac{x}{f}\right)^2 & \frac{xy}{f}\\ \frac{xy}{f} & 1+\left(\frac{y}{f}\right)^2\end{bmatrix}$$

גרף של פונ' f כלשהי:

דוג': ספרה S^2 יחידה $\{\rho=1\}$ (θ,φ)

$(u^1,u^2)=(\theta,\varphi)$

$x(\theta,\varphi)=(\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$

$x_1=\frac{\partial x}{\partial\theta}$ $\qquad$ $x_2=\frac{\partial x}{\partial\varphi}$

$$x_1=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\qquad x_2=\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\\ -\sin\varphi\end{bmatrix}$$

$g_{11}=|x_1|^2=\sin^2\varphi$ $\qquad$ $g_{22}=|x_2|^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

$g_{12}=-\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\sin\theta=0$

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

<u>הגדרה</u>: וקטורים $\underline{x}_i=\frac{\partial\underline{x}}{\partial u^i}$ הם וקטורים משיקים של M

<u>הערה</u>: מטריצה M היא מטריצת Gram של זוג וקטורים $(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$

וגם $g_{ij}=J_x^t J_{\underline{x}}$

<u>הגדרה</u>: המישור הנפרש ע"י $\underline{x}_1,\underline{x}_2$ נקרא מישור משיק של M $\quad T_pM$

$T_pM=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$

<u>הגדרה</u>: תבנית יסודית ראשונה של M היא תבנית בילינארית על מרחב T_pM מוגדרת ע"י

$I_p: T_pM\times T_pM\longrightarrow\mathbb{R}$

$I_p(v,w)=\langle v,w\rangle_{\mathbb{R}^3}$ $\quad$ לכל $v,w\in T_pM$

<u>משפט</u>: ביחס לבסיס (x_1,x_2) $\ I_p$ מתבטא על ידי מטריצה (g_{ij})

הוכחה:

$I_p(\underline{x}_i,\underline{x}_j):=\langle\underline{x}_i,\underline{x}_j\rangle_{\mathbb{R}^3}=g_{ij}$

משטחים, מרחקים, Γ_{ij}^k, קווים גאודזיים

$x: U \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ $x(u^1, u^2)$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$, $\langle\, , \,\rangle_{\mathbb{R}^3}$

בכל נק' יש מישור משיק הנפרש ע"י הוקטורים (המשיקים) $\frac{\partial x}{\partial u^1} = x_1$, $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$

הכל ניתן להכליל ליריעה n מימדית.

$$T_pM = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(x_1, x_2)$$

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{R}^3} \qquad g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2) \qquad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}$$

מטריצת התבנית היסודית הראשונה I_p

$$g_{11} = \|x_1\|^2 \qquad g_{22} = \|x_2\|^2 \qquad g_{12} = |x_1||x_2|\cos\alpha$$

מישור, גליל

- דוג': מישור

$$x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0) \in \mathbb{R}^3$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad g_{ij} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij}$$

- דוג': גליל

$$x(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -\sin u^1 \\ \cos u^1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

משטחי סיבוב

$u^1 = \theta \qquad u^2 = \varphi$.

לוקחים פרמטריזציה של עקומה $C\ (\overset{x}{f(\varphi)}, \overset{z}{g(\varphi)})$ על מישור $[xz]$

ואז מסובבים אותה סביב ציר למשטח $x(\theta, \varphi) = (f(\varphi)\cos\theta, f(\varphi)\sin\theta, g(\varphi))$

כאשר $f(\varphi) > 0$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -f(\varphi)\sin\theta \\ f(\varphi)\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \qquad x_2 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\theta \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\theta \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = f^2(\varphi) \qquad g_{22} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$g_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle = -f(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\sin\theta\cos\theta + f(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cos\theta\sin\theta = 0.$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2 \end{bmatrix}$$

משפט: נניח $(f(\varphi), g(\varphi))$ פרמטריזציית אורך הקשת של C אזי למשטח הסיבוב המתאים יש תבנית יסודית ראשונה $\begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

הוכחה:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2=1$$

- דוג': נניח $f(\varphi)=\sin\varphi$ $\quad g(\varphi)=\cos\varphi$ $\quad 0<\varphi<\pi$

מקבלים ספירה, עם ת.י.ך

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

פסיודו ספירה

נגדיר

$$f(\varphi)=e^{\varphi} \qquad g(\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^{2\varphi}}\,d\varphi$$

כאשר $-\infty<\varphi<0$

$$g(\varphi)=-\int_{\varphi}^{0}\sqrt{1-e^{2\varphi}}\,d\varphi$$

בהמשך נראה שפסיודו ספירה מקיימת $K\equiv -1$

$$g_{22}=\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2=e^{2\varphi}+\left(\sqrt{1-e^{2\varphi}}\right)^2 \qquad g_{11}=f^2(\varphi)=e^{2\varphi} \qquad g_{12}=0$$

$$e^{2\varphi}+1-e^{2\varphi}=1$$

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}e^{2\varphi} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

מדידת אורך על משטח

α עקומה, $\underline{x}$ משטח.

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{R}^2\xrightarrow{\underline{x}}\mathbb{R}^3$$

נסמן $\beta=\underline{x}\circ\alpha$ $\qquad \beta(t)=\underline{x}(\alpha(t))$ $\qquad \beta(s)=\underline{x}(\alpha(s))$.

משפט: תהי $\beta=\underline{x}\circ\alpha$ עקומה על משטח M אזי אורך L של עקומה הוא

$$L=\int_a^b\sqrt{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}\,dt=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(\alpha(t))\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}\,dt$$

(יש סכום אינשטיין)

$$u^1=\alpha^1(t) \qquad u^2=\alpha^2(t).$$

הוכחה:

$$L=\int_a^b|\beta'|\,dt=\int_a^b\langle\beta',\beta'\rangle^{\frac12}dt$$

$$\beta'=\frac{d\beta}{dt}=\frac{d(x\circ\alpha)}{dt}=\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{d\alpha^i}{dt}$$

סכום אינשטיין.

$$L=\int_a^b\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{d\alpha^i}{dt},\frac{\partial x}{\partial u^j}\frac{d\alpha^j}{dt}\right\rangle^{\frac12}dt$$

$$=\int_a^b\left(\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle_{\mathbb{R}^3}\right)^{\frac12}dt$$

$$=\int_a^b\left(\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}g_{ij}(\alpha(t))\right)^{\frac12}dt=\int_a^b\sqrt{g_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}}\,dt$$

- דוג': אם $g_{ij}=\delta_{ij}$ אזי

$$L=\int_a^b\left[\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2\right]^{\frac12}dt=\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,dt$$

$$x=x(t)=\alpha^1(t) \qquad y=y(t)=\alpha^2(t)$$

$$L=\int_a^b\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac12}dt=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b ds$$

מקדמים Γ_{ij}^k

$M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח רגולרי

$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ $x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$

$<n, x_1> = 0$

$<n, x_2> = 0$

$n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1 \times x_2\|}$

$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = ?$

נשתמש בבסיס ל-$\mathbb{R}^3$ (x_1, x_2, n)

<u>הגדרה:</u> מקדמים Γ_{ij}^k מוגדרים ע"י נוסחה

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i u^j} = \Gamma_{ij}^1 x_1 + \Gamma_{ij}^2 x_2 + (L_{ij}) n$$

באופן שקול.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n \qquad k = 1, 2.$$

תכונות בסיסיות של Γ_{ij}^k

<u>משפט:</u> מקדמים מקיימים את הנוסחה

$x_l = \frac{\partial x}{\partial u^l}$ $x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}$

(g^{lk}) מטריצה הפוכה של (g_{ij})

$$\Gamma_{ij}^k = <x_{ij}, x_l> g^{lk}$$

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

<u>הוכחה:</u>

נכפיל מכפלה סקלרית ב- $x_l = \frac{\partial x}{\partial u^l}$

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$$

$$<x_{ij}, x_l> = <\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n, x_l> =$$
$$<\Gamma_{ij}^k x_k, x_l> + <L_{ij} n, x_l> =$$
$$\Gamma_{ij}^k <x_k, x_l> + L_{ij} <n, x_l> = \Gamma_{ij}^k <x_k, x_l>$$

$$<x_{ij}, x_l> = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

נכפיל ב- g^{lm}

$$<x_{ij}, x_l> g^{lm} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} g^{lm} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^m$$

$$\Gamma_{ij}^m = <x_{ij}, x_l> g^{lm}$$

– דוגמה: מישור $\underline{x}(u^1, u^2, 0)$ $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_{ij} = 0 \quad \forall ij$

לכן $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל ijk

דוג': גליל

$$x(u^1,u^2)=(\cos u^1, \sin u^1, u^2)$$

$$x_1=\begin{bmatrix}-\sin u^1\\ \cos u^1\\ 0\end{bmatrix}\qquad x_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad x_{22}=x_{21}=0$$

לכן $\Gamma_{2j}^k=0$ לכל jk נחשב את Γ_{11}^k

$$x_{11}=\begin{bmatrix}-\cos u^1\\ -\sin u^1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x_{11}=0x_1+0x_2+(-1)n \qquad n=\begin{bmatrix}\cos u^1\\ \sin u^1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1=0=\Gamma_{11}^2$$

מסקנה: $\Gamma_{ij}^k=0$ לכל k,j,i

הגדרה: נסמן

$$g_{ij;k}=\frac{\partial}{\partial u^k}\left(g_{ij}(u^1,u^2)\right)$$

משפט: מתקיים

$$g_{ij;k}=2g_{m\{i}\Gamma_{j\}k}^m$$

כאשר $\{\}$ מסמן סימטריזציה

הוכחה:

לפי לייבניץ Leibniz

$$g_{ij;k}=\frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ij})=\frac{\partial}{\partial u^k}\langle x_i,x_j\rangle=\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle\right)$$

$$=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^k}\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle=$$

$$\langle x_{ik},x_j\rangle+\langle x_i,x_{jk}\rangle=\langle x_{ik},x_j\rangle+\langle x_{jk},x_i\rangle$$

$$g_{ij;k}=\langle\Gamma_{ik}^l x_l+L_{ij}n,x_j\rangle+\langle\Gamma_{jk}^l x_l+L_{ij}n,x_i\rangle$$

$$=\Gamma_{ik}^l\langle x_l,x_j\rangle+\Gamma_{jk}^l\langle x_l,x_i\rangle=\Gamma_{ik}^l g_{lj}+\Gamma_{jk}^l g_{li}$$

$$=g_{lj}\Gamma_{ik}^l+g_{li}\Gamma_{jk}^l=2g_{l\{i}\Gamma_{j\}k}^l$$

טבע פנימי של Γ_{ij}^k

משפט: מקדמים Γ_{ij}^k ניתנים לביטוי באמצעות של מקדמים של ת.י.ר ונגזרותיה בלבד

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}(g_{il;j}-g_{ij;l}+g_{jl;i})g^{lk}$$

הוכחה:

$$(g_{il;j}-g_{ij;l}+g_{jl;i})=2g_{m\{i}\Gamma_{l\}j}^m-2g_{m\{i}\Gamma_{j\}l}^m+2g_{m\{j}\Gamma_{l\}i}^m$$

$$=g_{mi}\Gamma_{lj}^m+g_{ml}\Gamma_{ij}^m-g_{mi}\Gamma_{jl}^m-g_{mj}\Gamma_{li}^m+g_{mj}\Gamma_{li}^m+g_{ml}\Gamma_{ji}^m=2g_{ml}\Gamma_{ij}^m$$

$$g^{ln}(g_{il;j}-g_{ij;l}+g_{jl;i})=2g^{ln}g_{ml}\Gamma_{ij}^m=2\delta_m^n\Gamma_{ij}^m=2\Gamma_{ij}^n$$

מקדמים Γ_{ij}^k של משטח סיבוב

$u^1=\theta \qquad u^2=\varphi$

$$x(\theta,\varphi)=(f(\varphi)\cos\theta, f(\varphi)\sin\theta, g(\varphi))$$

משפט: מקדמים של משטחי סיבוב מקיימים

$$\Gamma_{11}^{\ 1} = \Gamma_{22}^{\ 1} = 0$$

$$\Gamma_{12}^{\ 1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{f} = \frac{f\frac{df}{d\varphi}}{f^2}$$

$\Gamma_{ij}^{\ 1}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	0	$\frac{1}{f}\frac{df}{d\varphi}$
$j=2$	$\frac{1}{f}\frac{df}{d\varphi}$	0

הוכחה: $g_{12}=0$ לגבי משטח סיבוב לכן $g^{12}=0$

$$\Gamma_{ij}^{\ k} = \frac{1}{2}\left(g_{ik;j} - g_{ij;k} + g_{jk;i}\right)\frac{1}{g_{kk}}$$

לכן $g_{ii}=g_{ii}(\varphi)$ לכן $\frac{d}{d\theta}(g_{ii})=0$ לכן $g_{ii;1}=0$ לכל i

$$\Gamma_{12}^{\ 1} = \frac{1}{2g_{11}}\left(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{12;1}\right)$$

$$= \frac{g_{11;2}}{2g_{11}} = \frac{\frac{d}{d\varphi}(f^2)}{2f^2} = \frac{2f(\varphi)\frac{df}{d\varphi}}{2f^2(\varphi)} = \frac{1}{f(\varphi)}\frac{df}{d\varphi}$$

מטריקות קונפורמיות למטריקה שטוחה סטנדרטית $g_{ij}=\delta_{ij}$

משפט: נתבונן במטריקה $g_{ij}=\lambda(u^1,u^2)\delta_{ij}$
אזי מתקיים

$$\Gamma_{11}^{\ 1} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} \qquad \Gamma_{22}^{\ 1} = \frac{-\lambda_1}{2\lambda} \qquad \Gamma_{12}^{\ 1} = \frac{\lambda_2}{2\lambda}$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda(u^1,u^2) & 0 \\ 0 & \lambda(u^1,u^2) \end{bmatrix} \qquad g_{11}=g_{22} \qquad \lambda>0.$$

$$\lambda_i = \frac{\partial}{\partial u_i}(\lambda)$$

$\Gamma_{ij}^{\ 1}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$
$i=2$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$

$\Gamma_{ij}^{\ 2}$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$-\frac{\lambda_2}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$
$i=2$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$

הוכחה:

$$\Gamma_{ij}^{\ 1} = \frac{1}{2\lambda}\left(g_{i1;j} - g_{ij;1} + g_{j1;i}\right)$$

קווים גיאודזיים על משטח

משוואה גיאודזית: עקומה α במישור $\alpha : \underset{t\in[a,b]}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$

$M : \underset{u}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3$ $\quad (u^1,u^2) \to x(u^1,u^2)$

$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}$ $\quad x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}$ $\quad n = \frac{x_1 \times x_2}{\|x_1\times x_2\|}$ בסיס (x_1, x_2, n)

$\beta = x\circ\alpha \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{x} \mathbb{R}^3$

כל עקומה רגולרית על משטח M מקיימת
$$\beta'' = (\alpha^{i'}\alpha^{j'}\Gamma_{ij}^{\ k} + \alpha^{k''})x_k + (L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'})n$$

שורה לא נמצא בטנזוריאלי X
$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \left(\Gamma_{ij}^{\ k} + \frac{d^2\alpha^k}{dt^2}\right)x_k + \left(L_{ij}\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}\right)n$$

הוכחה:

$$\beta = x\circ\alpha$$
$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt}(x\circ\alpha) = \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{d\alpha^i}{dt} = x_i\alpha^{i'} = \beta'$$
$$\beta'' = \frac{d}{dt}\left(x_i\circ\alpha(t)\,\alpha^{i'}\right)$$

כלל Leibniz

$$\frac{d}{dt}\left(x_i\circ\alpha(t)\right)\alpha^{i'} + x_k\circ\alpha(t)\,\alpha^{k''}$$
$$= \frac{\partial x_i}{\partial u^j}\frac{d\alpha^j}{dt}\alpha^{i'} + x_k\circ\alpha\,\alpha^{k''} = x_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} + x_k\circ\alpha\,\alpha^{k''}$$
$$\beta'' = \alpha^{i'}\alpha^{j'}x_{ij} + \alpha^{k''}x_k = \alpha^{i'}\alpha^{j'}(\Gamma_{ij}^{\ k}x_k + L_{ij}n) + \alpha^{k''}x_k$$
$$= (\alpha^{i'}\alpha^{j'}\Gamma_{ij}^{\ k} + \alpha^{k''})x_k + \alpha^{i'}\alpha^{j'}L_{ij}n$$

הגדרה: עקומה $\beta = x\circ\alpha$ היא קו גיאודזי על משטח $x = x(u^1,u^2)$ אם מתקיים אחד התנאים הבאים

I לכל $k=1,2$ מתקיימת המשוואה $\quad * \ \alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^{\ k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$

II וקטור β'' מאונך למשטח ומתקיים יחס $\quad \beta'' = L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n$

הוכחה: של שקילות

אם β'' מאונך למשטח אזי $\quad \beta'' = a x_1 + b x_2 + c n$

אז $a=b=0$ ומתקיים $*$

...

-דוג: מישור $[x,y]$ מוגדר ע"י $\{z=0\}$ $\quad x(u^1,u^2) = (u^1,u^2,0)$

$\Gamma_{ij}^{\ k} = 0 \quad \forall i,j,k$ לכן משוואה של קו גאודזי במישור $\alpha^{k''} = 0$

$a,b,c,d\in\mathbb{R} \qquad \alpha^2(t) = ct+d \qquad \alpha^1(t) = at+b$

משפט: אם $\beta(t)$ מקיים $\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^{\ k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$ לכל k אזי $\beta(t)$ היא עקומה במהירות קבועה.

הוכחה: צ״ל $\frac{d}{dt}\|\beta'\|^2 = 0$

$$\frac{d}{dt}\|\beta'\|^2 = \frac{d}{dt}\langle \beta'(t), \beta'(t)\rangle$$

$$= \langle \beta''(t), \beta'(t)\rangle + \langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle$$ לפי Leibniz

$$= 2\langle \beta'(t), \beta''(t)\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\beta'\|^2 = \langle \beta', \beta''\rangle = \langle x_k \alpha^{k'}, L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} n\rangle$$

$$= \alpha^{k'} L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}\langle x_k, n\rangle = 0$$

קווים גיאודזיים של משטח סיבוב

$(\theta, \varphi) = (u^1, u^2)$

$$x(\theta, \varphi) = (f(\varphi)\cos\theta,\ f(\varphi)\sin\theta,\ g(\varphi))$$

$f(\varphi) = r(\varphi)$ מרחק מציר Z

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{dg}{d\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{r}$$

$$\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^{k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$$

$$\alpha^{1''} + \Gamma_{ij}^{1}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$$

$$\alpha^{1''} + 2\Gamma_{12}^{1}\alpha^{1'}\alpha^{2'} = 0$$

$$\theta'' + 2\Gamma_{12}^{1}\theta'\varphi' = 0$$

$$\theta'' + \frac{2\frac{dr}{d\varphi}}{r}\theta'\varphi' = 0$$

$$r^2\theta'' + 2r\frac{dr}{d\varphi}\theta'\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$r^2\theta'' + 2r\frac{dr}{dt}\theta' = 0$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0 \qquad r^2\theta' = C$$ $k=1$.

משפט: משוואה גיאודזית $(k=1)$ של משטח סיבוב היא שקולה ליחס של Clairout

$$r\cos\gamma = C$$

γ - זווית בין עקומה לקו רוחב

הוכחה:

$$\cos\gamma = \frac{V\cdot W}{|V||W|} \qquad V = x_1 \qquad W = \beta' \qquad |\beta'| = 1$$

נניח ש $\beta(s)$ היא במהירות יחידה

$$\cos\gamma = \left\langle \frac{x_1}{|x_1|}, \beta'\right\rangle = \frac{1}{|x_1|}\langle x_1, \beta'\rangle$$

$$= \frac{1}{|x_1|}\langle x_1, x_1\alpha^{1'} + x_2\alpha^{2'}\rangle = \frac{1}{|x_1|}\langle x_1, x_1\alpha^{1'}\rangle = \frac{\alpha^{1'}}{|x_1|}\langle x_1, x_1\rangle$$

$$\cos\gamma = \alpha^{1'}|x_1| = \theta'|x_1| = \theta'\sqrt{g_{11}} = \theta'\sqrt{f^2} = \theta'\sqrt{r^2} = r\theta'$$

ראינו $r^2\theta' = C$ לכן

$$r\cos\gamma = C.$$

$r^2\theta' = c$

$\theta' = \frac{c}{r^2} = \frac{c}{f^2(\varphi)} = \frac{d\theta}{ds}$

s - פרמטר אורך הקשת

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{f^2}{c}$.

פיתרון של משוואות קו גיאודזי על משטח סיבוב.

$\beta(s) = x \circ \alpha(s)$

$1 = |\beta'(s)|^2 = \langle x_1 \alpha^{1'} + x_2 \alpha^{2'}, x_1 \alpha^{1'} + x_2 \alpha^{2'} \rangle =$

$\langle x_1\theta' + x_2\varphi', x_1\theta' + x_2\varphi' \rangle = \theta'^2 g_{11} + \varphi'^2 g_{22}$

$1 = f^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \quad / \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \qquad g_{22} = \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2$

$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = f^2 + g_{22}\left(\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{d\theta}\right)^2$

$\left(\frac{f^2}{c}\right)^2 = f^2 + g_{22}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \frac{f^4}{c^2}$

$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{f^2} + \frac{g_{22}}{f^4}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2$

$\frac{d\theta}{d\varphi} = \sqrt{\frac{g_{22}}{\frac{f^4}{c^2} - f^2}}$

$\theta = \int \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2}{\frac{f^4(\varphi)}{c^2} - f^2(\varphi)}\right]} d\varphi + c_1$

$\theta = c\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - c^2}} + c_1$. $\qquad f(\varphi) = \sin\varphi \quad g(\varphi) = \cos\varphi$ על S^2

קואורדינטות פולריות, ספריות ואינטגרל

שטח.

$\text{area}(U) = \iint_U dx\,dy$. בקרטזיות

$\text{area}(U) = \iint_U r\,dr\,d\theta$. בפולריות.

נפח

$\text{Vol}\,U = \iiint_U dx\,dy\,dz$ בקרטזיות.

$\text{Vol}\,U = \iiint_U \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \qquad (\rho, \theta, \varphi)$. ספריות

מדידת שטח על משטח כללי.

הגדרה:

$$area(M) = \iint \sqrt{\det(g_{ij})}\, du^1 du^2 .$$

$$= \iint |x_1 \times x_2|\, du^1 du^2$$

- דוג': שטח על S^2

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(g_{ij}) = \sin^2\varphi$$

לכן

$$area(u) = \iint \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

נגזרת כיוונית

$V \in \mathbb{R}^n$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נייצג וקטור V ע"י עקומה, $c(t)$ כאשר

$$V = c'(t)|_{t=0} \qquad V = \frac{dc}{dt}$$

הגדרה: תהי f פונ' של n משתנים אזי נגזרת כיוונית $\nabla_V f$ בכיוון של וקטור V היא

$$\nabla_V f = \frac{d(f \circ c)}{dt}\Big|_{t=0}$$

- דוג':

$$V = \frac{\partial}{\partial u^1} \qquad V = e_1 \qquad c(t) = (t, 0) \qquad (t, t^2)$$

משפט: הנגזרה של $\nabla_V f$ היא בלתי תלויה בבחירת עקומה $c(t)$

הגדרה: מישור המשיק T_p למשטח M הוא מישור הנפרש על ידי וקטורים x_1, x_2.

$$\mathbb{R}^3 = T_p \oplus \mathbb{R}_n \qquad \dim T_p = 2 \qquad \dim \mathbb{R}_n = 1$$

- דוג': נניח $x(u^1, u^2)$ היא פרמטריזציה של ספירה, יחידה, S^2 אזי וקטור נורמלי

בנק' $(a,b,c) \in S^2$

$$n(u^1, u^2) = x(u^1, u^2) \qquad n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Hessian העתקת Weingarten עקמומית של גאוס

$$\nabla_v f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) \qquad v=\alpha'(0)$$

הרחבת שדה וקטורי לאורך משטח לתחום פתוח ב-$\mathbb{R}^3$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta(t)"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "x"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad n(u^1,u^2)=\frac{x_1\times x_2}{\|x_1\times x_2\|} \qquad v=\beta'(0) \qquad v\in T_pM$$

$$p=x(u^1_0,u^2_0)$$

משפט: ניתן להרחיב $n(u^1,u^2)$ לשדה וקטורי $N(x,y,z)$ בסביבה פתוחה של $p\in\mathbb{R}^3$ כאשר $n(u^1,u^2)=N(x(u^1,u^2))=N(x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2))$

הוכחה: נגדיר M ע"י פונ' $F(x,y,z)=0$ כאשר $\nabla F=0$ בכל נק' בסביבה
ניתן לנרמל N ולקבל שדה וקטורי $\frac{1}{|\nabla F|}\nabla F$ שהוא וקטור יחידה בכל נק'

דוג':
$F(x,y)=x^2+y^2=1 \qquad \nabla F=(2x,2y)$

משפט: תהי $p\in M$ וקטור $v\in T_pM$ כאשר $v=\beta'(0)$ $\beta(t)=x\circ\alpha(t)$
יהי N שדה וקטורי המרחיב את הוקטור הנורמלי $n(u^1,u^2)$ אזי נגזרת כיוונית מקיימת.

$$\nabla_v N(x,y,z)\Big|_p=\frac{d\,n(\alpha(t))}{dt}\Big|_{t=0} \qquad p=\beta(0)$$

הוכחה: מתקיים $N(\beta(t))=n(\alpha(t))$ כאשר $\beta=x\circ\alpha$ לכן ניתן לחשב $\nabla_v N$ ע"י עקומה β

$$\nabla_v N=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}N\circ\beta(t)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}n\circ\alpha$$

Hessian של פונ' בנק' קריטית

נניח $f(x,y)$ $\nabla f=0$ בנק' $p=(0,0)$ $\quad f(0,0)=0$

הערה: מישור המשיק של גרף של f ב-$(0,0)$ הוא מישור (x,y)

משפט: נניח שערכים של H_f הם שונים מאפס אם לע"ע יש סימנים הפוכים אזי גרף הוא מסוג נק' אוכף ואם לע"ע יש אותו סימן אזי גרף הוא מסוג מינימום או מקסימום

העתקת Weingarten

$$U\xrightarrow{x}M \qquad M=x(u^1,u^2) \qquad T_pM=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(x_1,x_2)$$

$$n(u^1,u^2)=N(x(u^1,u^2)) \qquad x_i=\frac{\partial x}{\partial u^i} \qquad i=1,2$$

הגדרה: העתקת Weingarten היא טרנספורמציה W של T_p ע"י $W:T_p\to T_p$

$$W(v)=\nabla_v N=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}n\circ\alpha(t) \qquad v=\beta'(0) \qquad \beta(t)=x(\alpha(t)) \qquad p=\beta(0)$$

$$\forall v\in T_p$$

הוכחה: $W_p(v)\perp n$?

$$0 \overset{?}{=} \langle W(v), n\rangle = \langle \nabla_v N, n\rangle = \langle \frac{d}{dt} n\circ\alpha(t), n\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle n(\alpha(t)), n(\alpha(t))\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|n\|^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1) = 0$$

לכן $W(v)$ הוא וקטור משיק.

משפט: אופרטור W_p הוא צמוד לעצמו $\langle W(v), v'\rangle = \langle v, W(v')\rangle$

$v, v' \in T_p$

הוכחה: בסיס (x_1, x_2) ל-T_p מספיק להראות עבור הבסיס.

$\alpha(t) = (t, 0)$.

$$\langle W(x_1), x_2\rangle = \langle \nabla_{x_1} N, x_2\rangle$$
$$= \langle \frac{d}{dt} n(\alpha(t)), x_2\rangle = \langle \frac{d}{dt} n(t,0), x_2\rangle = \langle \frac{\partial n}{\partial u^1}, x_2\rangle$$
$$= \frac{\partial}{\partial u^1}\langle n, x_2\rangle - \langle n, \frac{\partial}{\partial u^1}(x_2)\rangle = -\langle n, \frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2}\rangle$$

בגלל שוויון נגזרות חלקיות.

$$\langle W(x_i), x_j\rangle = -\langle n, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}\rangle = \langle W(x_j), x_i\rangle$$

- דוגמ: מישור $x_2 = e_2$ $\quad x_1 = e_1$ $\quad x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0)$

לכן $n = x_1 \times x_2 = e_3$

$$W(v) = \nabla_v n(u^1, u^2) = \nabla_v e_3 = 0$$

Weingarten של ספירה וגליל

משפט: נתונה ספירה ברדיוס $r>0$ אזי בכל נקי של הספירה $W(v) = \frac{1}{r}v$

במילים אחרות

$$W = \frac{1}{r} Id_{T_p}$$ - T_p העתקת הזהות של

הוכחה:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

בנק' $p = (x,y,z)$ וקטור נורמלי N הוא $N = \frac{1}{r}p$

לכן

$$W_p(v) = \nabla_v N = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} n\circ\alpha = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{1}{r}\beta(t)\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\beta(t) = \frac{1}{r}v$$

משפט: גליל

$$x(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)$$
$$x_1 = (-\sin u^1, \cos u^1, 0)$$
$$x_2 = (0, 0, 1)$$
$$n = x_1 \times x_2 = \cos u^1 e_1 + \sin u^1 e_2$$

$$W(x_1)=\nabla_{x_1}n=\frac{\partial}{\partial u^1}(n)=\begin{bmatrix}-\sin u^1\\ \cos u^1\\ 0\end{bmatrix}=x_1$$

$$W(x_2)=\nabla_{x_2}n=0$$

$$\text{rank}(W_p)=1$$

מקדמים L^i_j

הגדרה: מקדמים L^i_j הם מקדמים של W

$$W(x_j)=L^i_j x_i$$
$$W(x_j)=L^1_j x_1+L^2_j x_2$$

- דוג': במישור $L^i_j=0$ לכל i,j

ספירה $L^i_j=\frac{1}{r}\delta^i_j$

גליל $L^i_j=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$

עקמומיות של גאוס

הגדרה: יהי M משטח רגולרי. עקמומיות גאוס שלו היא פונ' $K=K(u^1,u^2)$ שהיא דטרמיננטה של העתקת Weingarten

$$K=\det W=\det(L^i_j)=L^1_1L^2_2-L^1_2L^2_1=2L^1_{[1}L^2_{2]}$$

- דוג': עקמומיות גאוס של ספירה ברדיוס r היא $K=\frac{1}{r^2}$

גליל $K=0$

תבנית יסודית שניה

הגדרה: תבנית יסודית שניה היא תבנית בילינארית על T_p מוגדרת ע"י

$$II_p(u,v)=-\langle\nabla_u n,v\rangle$$

הגדרה: מקדמים L_{ij} של II_p הם

$$L_{ij}=II_p(x_i,x_j)=-\langle\nabla_{x_i}n,x_j\rangle$$

למה: המקדמים L_{ij} של II_p הם סימטריים $L_{ij}=L_{ji}$

הוכחה:

$$L_{ij}=-\langle\nabla_{x_i}n,x_j\rangle=-\frac{\partial}{\partial u^i}\langle n,x_j\rangle+\langle n,\frac{\partial}{\partial u^i}x_j\rangle$$

$$L_{ij}=\langle n,x_{ij}\rangle=II_p(x_j,x_i)$$

למה: מתקיים

$$x_{ij}=\Gamma_{ij}^k x_k+L_{ij}n$$

הוכחה:

$$x_{ij}=\Gamma_{ij}^{k}x_k+Cn$$

$$\langle x_{ij},n\rangle=\langle \Gamma_{ij}^{k}x_k,n\rangle+\langle Cn,n\rangle=C\|n\|^2=C$$

$$C=\langle x_{ij},n\rangle=\mathrm{II}_p(x_i,x_j)=L_{ij}$$

קווים גאודזים ותבנית יסודית שניה

משפט: יהי $\beta(s)$ קו גאודזי על משטח M ב-$\mathbb{R}^3$ במהירות יחידה אזי

$$k_\beta(s)=|\mathrm{II}(\beta',\beta')|$$

הוכחה: לפי הגדרה ובגלל ש β גאודזי

$$k_\beta(s)=|\beta''(s)|=|L_{ij}\alpha'^i\alpha'^j n|$$

$$\mathrm{II}_p(\beta',\beta')=\mathrm{II}_p(x_i\alpha'^i,x_j\alpha'^j)=\alpha'^i\alpha'^j\,\mathrm{II}_p(x_i,x_j)=\alpha'^i\alpha'^j L_{ij}$$

$$=|L_{ij}\alpha'^i\alpha'^j|\underbrace{|n|}_{=1}$$

משפט: קיים יחס בין העתקת Weingarten לתבנית יסודית השניה

כאשר g_{ij} הם המקדמים של תבנית יסודית ראשונה.

$$L_{ij}=-L^k_j\, g_{ki}$$

הוכחה:

$$L_{ij}=\langle x_{ij},n\rangle=-\langle \nabla_{x_i}n,x_j\rangle=-\langle \frac{\partial n}{\partial u^i},x_j\rangle=-\langle W(x_i),x_j\rangle$$

$$=\langle L^k_i x_k,x_j\rangle=-L^k_i\langle x_k,x_j\rangle=-L^k_i g_{kj}$$

$$L_{ij}=L_{ji}=\ldots=-L^k_j g_{ki}$$

בדרך כלל $L^1_2\neq L^2_1$

עקמומיות נורמלות וגאודזיות של עקומה

נניח $\beta=x\circ\alpha$ עקומה רגולרית על משטח M. נניח ש $\beta(s)$ היא במהירות יחידה, $|\beta'(t)|=1$ לכן וקטורים $\beta'(s)$, $n(\alpha(s))$ הם אורתונורמליים.

בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ $(\beta',n,\beta'\times n)$

הגדרה: עקמומיות גאודזית k_g ועקמומיות נורמלית k_n של עקומה β ע"י נוסחה.

$$\beta''=k_n n+k_g(\beta'\times n)$$

משפט: מתקיים $k_\beta^2=k_n^2+k_g^2$ הוכחה פיתגורס.

*רגישות וריגידיות סעיף 9.10 בהוכרת

שלוש נוסחאות לעקמומיות של גאוס

משפט: מתקיימות שלוש נוסחאות שקולות הגדרות לעקמומיות של גאוס

$$k=\det(L^i_j)=2L^1_{[1}L^2_{2]}\qquad \mathrm{I}$$

$$k=\frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} \qquad II$$

$$k=\frac{-2}{g_{11}}L_{1[1}L^2{}_{2]} \qquad III$$

הוכחה: I הגדרה

II

$$L_{ij}=-L^k{}_j g_{ki}$$

$$\det(L_{ij})=\det(-L^k{}_j)\det(g_{ki})=\det(L^k{}_j)\det(g_{ki})$$

III

$$-\frac{2}{g_{11}}L_{1[1}L^2{}_{2]}=-\frac{1}{g_{11}}\left(L_{11}L^2{}_2-L_{12}L^2{}_1\right)$$

$$\frac{1}{g_{11}}\left(L^k{}_1 g_{k1}L^2{}_2-L^k{}_2 g_{k1}L^2{}_1\right)=$$

$$\frac{1}{g_{11}}\left(L^1{}_1L^2{}_2 g_{11}-L^1{}_2L^2{}_1 g_{11}\right)=L^1{}_1L^2{}_2-L^1{}_2L^2{}_1=k$$

עקמומיות ראשיות של משטח

הגדרה: עקמומיות ראשיות k_1,k_2 של משטח M הן ע"ע של העתקת Weingarten

משפט: עקמומיות גאוס של משטח היא כפל של k_1k_2

הוכחה:

$$k=\det(W)=\lambda_1\lambda_2=\det(L^i{}_j)=k_1k_2$$

משפט: יהי V וקטור משיק יחידה $|V|=1$ $V\in T_pM$ השייך לעקמומיות ראשית k_1 (ע"ע)

יהי $\beta(s)$ קו גאודזי על M המקיים $\beta'(0)=V$ אזי עקמומיות של β בתור עקומה ב-$\mathbb{R}^3$

היא ערך מוחלט של k_1 $\quad k_\beta(0)=|k_1|$

הוכחה: $V\in T_pM$ $\quad(x_1,x_2)$ בסיס ל T_pM לכן $V=v^ix_i$ מקיים $W(V)=k_1V$

$$W(V)=W(v^ix_i)=v^iW(x_i)=v^iL^k{}_ix_k$$

מצד שני

$$\pm k_\beta=II(\beta',\beta')=L_{ij}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}=L_{ij}v^iv^j$$

$P=\beta(0) \quad V=\beta'(0)$

$$\beta(t)=x\circ\alpha(t) \qquad V=\beta'=x_i\alpha^{i\prime}$$

$$v^ix_i=x_i\alpha^{i\prime} \qquad v^i=\alpha^{i\prime}$$

$$L_{ij}=-L^m{}_jg_{mi}$$

$$\pm k_\beta=-L^m{}_jg_{mi}v^iv^j$$

המשך בשעור הבא.

עקמומיות ראשיות

k_1, k_2 הם ע"ע של W_p אזי $K=k_1k_2$ $\qquad W_p: T_p \to T_p$

משפט: יהי $v\in T_p$ וקטור יחידה שהוא וקטור עצמי של ערך עצמי k_1

יהי $\beta(s)$ קו גאודזי המקיים $\beta'(0)=v$ $\qquad \beta(0)=p$

אזי עקמומיות $k_\beta(0)$ בנק' p היא ערך מוחלט $|k_1|$ $\qquad k_\beta(0)=|k_1|$

הוכחה: נניח $\beta(t)=x\circ\alpha(t)$ $\qquad \alpha(t)=(\alpha^1(t),\alpha^2(t))$

$$\beta'(t)=\sum_{i=1}^{2} x_i\alpha^{i\prime}=x_1\alpha^{1\prime}+x_2\alpha^{2\prime}$$

$$v=\beta'(0)=x_1\alpha^{1\prime}(0)+x_2\alpha^{2\prime}(0)$$

$$v=v^1x_1+v^2x_2 \in T_pM$$

$$v^1=\alpha^{1\prime}(0) \qquad v^2=\alpha^{2\prime}(0)$$

$$W_p(v)=k_1v$$

$$W_p(x_j)=L^i{}_j\,x_i$$

$$W_p(v)=W_p(v^jx_j)=v^jW_p(x_j)=v^jL^i{}_jx_i=k_1v^ix_i$$

$$\forall i=1,2 \qquad v^jL^i{}_j=k_1v^i$$

מצד שני

$$\pm k_\beta(0)=\mathrm{II}(\beta'(0),\beta'(0))=\mathrm{II}(v,v)=\mathrm{II}(v^ix_i,v^jx_j)$$

$$=v^iv^j\,\mathrm{II}(x_i,x_j)=v^iv^jL_{ij}=-v^iv^jL^m{}_jg_{im}=-(v^jL^m{}_j)v^ig_{im}$$

$$L_{ij}=L^m{}_jg_{im}$$

$$=-k_1v^mv^ig_{im}=-k_1g_{im}v^iv^m=-k_1\,\mathrm{I}(v,v)-k_1|v|^2=-k_1$$

$$k_\beta(0)=|k_1|$$

מסקנה: ערך מוחלט של עקמומיות של גאוס בנק' p היא כפל של עקמומיות של שני קוים גאודזיים דרך p כאשר וקטורים משיקים שלהם הם וקטורים עצמיים של העתקת Weingarten בנק' p

הגדרה: עקמומיות ממוצעת $H(p)$ היא $(\frac{1}{2})$ עקבה של W_p

$$H_p=\frac{1}{2}tr(W_p)=\frac{k_1+k_2}{2}$$

משטחים מינימליים

משטח M הוא מינימלי אם בכל נק' $H=0$

$k_1+k_2=0 \qquad k_1=-k_2$

הגדרה: פרמטריזציה $x(u^1,u^2)$ היא isothermal אם קיימת פונ' $f=f(u^1,u^2)$ כאשר

$$g_{ij}=f^2\delta_{ij} \qquad (g_{ij})=\begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{ij}(u^1,u^2)=f^2(u^1,u^2)\delta_{ij}$$

$f^2=\lambda$

זאת אומרת $\langle x_1,x_2\rangle=0 \qquad f^2=\langle x_1,x_1\rangle=\langle x_2,x_2\rangle$

משפט: נניח $x(u^1,u^2)$ היא פרמטריזציה isothermal אזי מתקיים

$$x_{11}+x_{22}=-2f^2Hn$$

n-נורמל למשטח.

הוכחה: מתקיים

$$L_{ij}=-L^m{}_j g_{mi}=-L^m{}_i f^2\delta_{mi}$$

$$L_{ij}=-L^i{}_j f^2$$

$$L^i{}_j=-\frac{1}{f^2}L_{ij}$$

לכן עקמומיות ממוצעת מקיימת

$$H(p)=\frac{1}{2}tr(W_p)=\frac{1}{2}(L^1{}_1+L^2{}_2)$$

$$H=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{f^2}(L_{11}+L_{22})\right)$$

$$g_{12}=\langle x_1,x_2\rangle=0$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\langle x_1,x_2\rangle=0=\langle x_{12},x_2\rangle+\langle x_1,x_{22}\rangle$$

$$-\langle x_{12},x_2\rangle=\langle x_1,x_{22}\rangle$$

$$g_{11}=g_{22}=f^2$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\langle x_1,x_1\rangle-\langle x_2,x_2\rangle=0\right)$$

$$2\langle x_{11},x_1\rangle-2\langle x_{12},x_2\rangle=0$$

$$2\langle x_{11},x_1\rangle+2\langle x_{22},x_1\rangle=0$$

$$\langle x_{11}+x_{22},x_1\rangle=0$$

באופן דומה מקבלים $\langle x_{11}+x_{22},x_2\rangle=0$

זאת אומרת $x_{11}+x_{22}$ מאונך למשטח. בבסיס ל-$\mathbb{R}^3$ (x_1,x_2,n)

לכן $x_{11}+x_{22}=cn$ כאשר $c\in\mathbb{R}$

$$c=\langle x_{11}+x_{22},n\rangle=\langle \Gamma_{11}^k x_k+L_{11}n+\Gamma_{22}^m x_m+L_{22}n,n\rangle$$

$$x_{11}+x_{22}=(L_{11}+L_{22})n=2f^2Hn$$

<u>הגדרה:</u> Laplacian $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial u^{1^2}}+\frac{\partial^2}{\partial u^{2^2}}$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

<u>נוסחא:</u> $\Delta(x)=-2f^2Hn$

<u>הגדרה:</u> פונ' $F(u^1,u^2)$ נקראת הרמונית אם $\Delta F=0$

<u>מסקנה:</u> נניח ש $x(u^1,u^2)=(x(u^1,u^2),y(u^1,u^1),z(u^1,u^2))$ פרמטריזציה isothermal אזי משטח x הוא מינימלי אם ורק אם שלושת הקואורדינטות $x(u^1,u^2),y(u^1,u^2),z(u^1,u^2)$ הן פונ' הרמוניות

<u>הוכחה:</u> לפי משפט קודם

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y^2)+(\Delta z)^2}=\|\Delta x\|=2f^2|H|$$

- <u>דוגמ:</u> Catenoid

$$x(\theta,\varphi)=(a\cosh\varphi\cos\theta,a\cosh\varphi\sin\theta,a\varphi)$$

$$g_{11}=g_{22}=a^2\cosh^2\varphi=f^2 \qquad f=a\cosh\varphi$$

$$x_{11}+x_{22}=\begin{matrix}-a\cosh\varphi\cos\theta\\-a\cosh\varphi\sin\theta\\0\end{matrix}+\begin{matrix}a\cosh\varphi\cos\theta\\a\cosh\sin\theta\\0\end{matrix}=\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}$$

Heorema egregium תכונות פנמיות ותיצוניות

$$k=k\left(g_{ij},\frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij},\frac{\partial^2}{\partial u^k\partial u^l}g_{ij}\right)$$

<u>נוסחא של Remann</u>

$\alpha\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}$$ מטריקה.

$$g_{11}=g_{22}=\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum u_i^2}\right)^2\sum x_i^2\ \sum dx_i^2 \qquad g_{12}=0$$

$$g_{ii}(u^1,u^2)=\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum(u^i)^2}\right)^2$$

<u>הקדמות למשפט egregium</u>

$$x_{ij}=\Gamma_{ij}^{\ k}x_k+L_{ij}n \qquad g_{ij},L_{ij},\Gamma_{ij}^{\ k}$$

Weingarten $\frac{\partial n}{\partial u^j}=n_j=L_j^{\ i}x_i$ $\qquad a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}$

$g_{[ij]}=0 \qquad L_{[ij]}=0 \qquad \Gamma_{[ij]}^{k}=0$

זהות המכולבה ___ Γ_{ij}^{k} ___ L_{ij}

משפט:

$$\Gamma_{i[j;k]}^{q} + \Gamma_{i[j}^{m}\Gamma_{k]m}^{q} = -L_{i[j}L^{q}{}_{k]}$$

$$\Gamma_{ij;k}^{q} \equiv \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma_{ij}^{q}$$

$$x_{ijk} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$$

הוכחה: נבדוק

$$(x_{ij})_k = (\Gamma_{ij}^{m} x_m + L_{ij}\, n)_k$$

$$= \Gamma_{ij;k}^{m} x_m + \Gamma_{ij}^{m} x_{mk} + L_{ij}\, n_k + L_{ij;k}\, n$$

$$\Gamma_{ij;k}^{m} x_m + \Gamma_{ij}^{m}(\Gamma_{mk}^{p} x_p + L_{mk}\, n) + L_{ij}(L^{p}{}_{k} x_p) + L_{ij;k}\, n$$

$$\Gamma_{ij;k}^{m} x_m + \Gamma_{ij}^{m}(\Gamma_{mk}^{p} x_p) + L_{ij} L^{p}{}_{k} x_p + (\dots)n$$

$$x_{ijk} = (\Gamma_{ij;k}^{q} + \Gamma_{ij}^{m}\Gamma_{km}^{q} + L_{ij}L^{q}{}_{k})\, x_q + (\dots)\, n$$

$$x_{i[jk]} = (\underbrace{\Gamma_{i[j;k]}^{q} + \Gamma_{i[j}^{m}\Gamma_{k]m}^{q} + L_{i[j}L^{q}{}_{k]}}_{0})\, x_q + (\dots)\, n$$

$x_{[ij]}=0$

$x_{i[jk]}=0$.

$$\forall q=1,2 \qquad \Gamma_{i[j;k]}^{q} + \Gamma_{i[j}^{m}\Gamma_{k]m}^{q} + L_{i[j}L^{q}{}_{k]} = 0$$

משפט egregium של גאוס:

$$k = \det(L^{i}{}_{j}) = 2L^{1}{}_{[1}L^{2}{}_{2]}$$

$$k = -\frac{2}{g_{11}} L_{1[1}L^{2}{}_{2]}$$

משפט: egregium עקמומיות Gauss $k=k(u^1,u^2)$

מתבטאת באמצעות של מקדמים של המטריקה (ונגזרותיה) בלבד ע"י הנוסחא.

$$k = \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma_{1[1;2]}^{2} + \Gamma_{1[1}^{j}\Gamma_{2]j}^{2}\right.$$

כאשר מקדמים

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}(g_{il,j} - g_{ij,l} + g_{jl,i})\, g^{lk}$$

הוכחה: לבטא את x_{ijk} באמצעות Γ ו- L

שוויון של נגזרות מעורבות נותן יחס בין Γ ל- L

מקבלים ביטוי ל- k באמצעות L ו- Γ

נ"שם משפט קודם עם אינדקסים $\begin{cases} i=j=1 \\ k=q=2 \end{cases}$ אזי

$$\Gamma^{2}_{1[1;2]} + \Gamma^{m}_{1[1}\Gamma^{2}_{2]m} = -L_{1[1}L^{2}_{2]} = -g_{1i}L^{i}_{[1}L^{2}_{2]} = g_{11}L^{1}_{[1}L^{2}_{2]} = \tfrac{1}{2}g_{11}K$$

	W	K Gauss	ממוצעת H
מישור	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	0	0
גליל	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$	0	0
אין ברינטיות של עקמומיות		כן	לא

<u>נוסחת Laplacian למגי עקמומיות גאוס</u>

בקואורדינטות איזותרמיות $(g_{ij}) = f^2\delta_{ij}$ $\quad \lambda = f^2 > 0$

$$(g_{ij}) = \lambda(u^1,u^2)\delta_{ij}$$

<u>הגדרה</u>: אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB} של מטריקה $g_{ij} = \lambda(u^1,u^2)\delta_{ij}$ הוא אופרטור

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\lambda}\Delta$$

באופן יותר מפורט לכל פונ' h

$x = u^1 \quad y = y^2$

$$\Delta_{LB}(h) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)$$

<u>משפט</u>: עקמומיות Gauss בקואורדינטות איזותרמיות מתבטאת ע"י נוסחא

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\log\lambda)$$

$\log$ טבעי ($\ln$)

כאשר λ הוא גורם קונפורמי של המטריקה $g_{ij} = \lambda\delta_{ij}$

$$K = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}\Delta(\log\lambda)$$

הוכחה: נגדיר $\lambda = e^{2\mu}$ $\quad \lambda > 0 \quad g_{ij} = \lambda(u^1,u^2)\delta_{ij}$

$$\lambda(u^1,u^2) = e^{2\mu(u^1,u^2)} \qquad \mu(u^1,u^2) = \frac{1}{2}\log(\lambda(u^1,u^2))$$

Γ^1_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	μ_1	μ_2
$i=2$	μ_2	$-\mu_1$

Γ^2_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$-\mu_2$	μ_1
$i=2$	μ_1	μ_2

$$2\Gamma^{2}_{1[1;2]} = \Gamma^{2}_{11;2} - \Gamma^{2}_{12;1} = \frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma^{2}_{11} - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma^{2}_{12} = \frac{\partial}{\partial u^2}(-\mu_2) - \frac{\partial}{\partial u^1}\mu_1$$
$$= -\mu_{22} - \mu_{11} = -\Delta\mu$$

מחובר נוסף בנוסחא לא

$$2\Gamma^{j}_{1[1}\Gamma^{2}_{2]j} = \Gamma^{j}_{11}\Gamma^{2}_{2j} - \Gamma^{j}_{12}\Gamma^{2}_{1j}$$
$$= \mu_1(\mu_1) + (-\mu_2\mu_2) - \mu_2(-\mu_2) - \mu_1\mu_1 = 0.$$

$$K = \frac{2}{\lambda}\Gamma^{2}_{1[1;2]} = -\frac{1}{\lambda}(\mu_{11} + \mu_{22}) = -\Delta_{LB}\mu$$

$$K = -\Delta_{LB}\mu = -\Delta_{LB}\left(\frac{1}{2}\log\lambda\right) = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}(\log\lambda)$$

נניח $\lambda = f^2$ אזי $g_{11} = f^2 = \lambda = e^{2\mu}$

משפט: עקמומיות של Gauss בקואורדינטות הרמוניות מקיימת

$$K = -\Delta_{LB}\log f$$

הוכחה:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}\log f^2 = -\frac{1}{2}\Delta_{LB}2\log f = -\frac{1}{2}2\Delta_{LB}\log f = -\Delta_{LB}\log f$$

זהות Binet-Cauchy

משפט: $a,b,c,d \in \mathbb{R}^3$ מקיימים

$$(a\cdot c)(b\cdot d) = (a\cdot d)(b\cdot c) + (a\times b)\cdot(c\times d)$$
$$(a\times b)\cdot(c\times d) = (a\cdot c)(b\cdot d) - (a\cdot d)(b\cdot c)$$

משפט: במקרה $a=c$, $b=d$ מקבלים

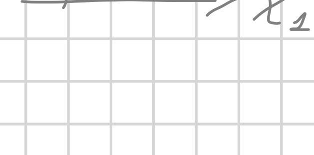
$$|a\times b|^2 = |a|^2|b|^2 - |a\cdot b|^2$$

מסקנה: $a = x_1$ $b = x_2$ אזי

$$|x_1\times x_2|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \det(g_{ij})$$

אם וקטורים x_i הם וקטורי יחידה $|x_1| = |x_2| = 1$ אזי $1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$

$g_{12} = \cos^2\varphi$ $\qquad |x_1\times x_2|^2 = \sin\varphi$



משפט Gauss-Bonnet

אלמנט שטח של משטח ושל ספירה.

משטח $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$

$g_{ij}=\langle x_i, x_j\rangle_{\mathbb{R}^3}$

לפי Binet-Cauchy

$\sqrt{\det(g_{ij})}=|x_{u^1}\times x_{u^2}|$

$x_{u^i}=x_i=\frac{\partial x}{\partial u^i}$

dA_Σ אלמנט שטח.

$area(\Sigma)=\int dA_\Sigma$

$dA_\Sigma=\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$

$area(\Sigma)=\iint\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2=\iint|x_{u^1}\times x_{u^2}|\,du^1du^2$

וקטור נורמל מנק' p נסמן N_p.

$|N_p|=1 \quad N_p\in S^2$

$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$.

$p=x(u^1,u^2)$

$N_p=N_{x(u^1,u_2)}$

וקטור $n(u^1,u^2)$ מוגדר ע"י $n=\frac{x_1\times x_2}{\|x_1\times x_2\|}$

$n(u^1,u^2)=N_{x(u^1,u^2)}$

משפט: אם עקמומיות Gauss $K\neq 0$ בנק' $p=x(u^1,u^2)$ של Σ אזי ההעתקה $n(u^1,u^2)$ מגדירה פרמטריזציה רגולרית של סביבה של נק' $n(u^1_0,u^2_0)$ על הספירה S^2.

הוכחה: העתקת Weingarten של Σ עם פרמטריזציה $x(u^1,u^2)$ היא Jacobian של $n(u^1,u^2)$ ומבוטאת ע"י מטריצה $(L_i^{\ j})$ כאשר

$W(x_1)=\frac{\partial n}{\partial u^1} \qquad W(x_2)=\frac{\partial n}{\partial u^2} \qquad \frac{\partial n}{\partial u^i}=L_i^{\ j}x_j$

אם $K\neq 0$, $\det W\neq 0$ כלומר $\det(L_i^{\ j})\neq 0$ לכן n מגדירה פרמטריזציה רגולרית (מטריצה בדרגה 2).

משפט: תהי $n(u^1,u^2)$ פרמטריזציה של סביבה על S^2 (כמו במשפט הקודם) אזי ניתן לבטא אלמנט שטח של S^2 ע"י הנוסחא.

$$dA_{S^2}=\sqrt{\det(\tilde{g}_{\alpha\beta})}\,du^1du^2$$

כאשר $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ הם מקדמים של מטריקה של הספירה ביחס לפרמטריזציה $n(u^1,u^2)$

הוכחה: לגבי כל משטח

$dA_\Sigma=\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$

במקרה פרטי של $n(u^1,u^2)$ מקבלים dA_{S^2}

הוכחה של Gauss-Bonnet

הערה: $C=\alpha(s)$ עקומה. $k=|\alpha''(s)|$. $\int_C k\,ds = 2\pi$.

משטח Σ, $x(u^1,u^2)$ פרמטריזציה (g_{ij}) מקדמים של המטריקה ביחס ל-$x(u^1,u^2)$

$\tilde g_{\alpha\beta}(u^1,u^2)$ הם מקדמים ביחס ל-$n(u^1,u^2)$ $K\neq 0$

למה: קיימת זהות

$$\det(\tilde g_{\alpha\beta})=K(u^1,u^2)^2\det(g_{ij})$$

כאשר K היא עקמומיות Gauss של Σ.

הוכחה: תהי $L=(L^i_j)$ מטריצה של Weingarten לכן

$n_i=\frac{\partial n}{\partial u^i}$ $\qquad n_{u^\alpha}=L^i_\alpha x_{u^i}=x_{u^i}L^i_\alpha$

יהיו A,B מטריצות $\quad A=[x_1\ \ x_2] \qquad B=[n_1\ \ n_2]$

אזי מתקיימת זהות $B=AL$ לכן

$$Gram(n_1,n_2)=B^tB$$
$$=(AL)^tAL=L^tA^tAL=L^t\,Gram(x_1,x_2)L$$

נחשב דטרמיננטה

$$\det(\tilde g_{\alpha\beta})=\det(L)^2\det(g_{ij})$$
$$=K^2\det(g_{ij}) .$$

לפי Bunet-Cauchy $\quad |n_{u^1}\times n_{u^2}|=|K||x_1\times x_2|$

משפט: מקרה פרטי של Gauss-Bonnet

יהי Σ משטח סגור קמור ב-$\mathbb{R}^3$ (כמו אליפסואיד). אזי

$$\iint_\Sigma K\,dA_\Sigma=4\pi=2\pi\underbrace{\chi(S^2)}_{\text{Euler מאפיין}}$$

הוכחה: משטח קמור $\Rightarrow$ n היא חח"ע ועל.

לפי הלמה

$$K(u^1,u^2)\,dA_\Sigma=K(u^1,u^2)\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2=$$
$$=\sqrt{\det(\tilde g_{\alpha\beta})}\,du^1du^2=dA_{S^2}$$

לכן $K\,dA_\Sigma$ מתלכד עם אלמנט שטח dA_{S^2} בכל סביבה

$$K\,dA_\Sigma=dA_{S^2}$$

לכן

$$\int_\Sigma K\,dA_\Sigma=\int_{S^2}dA_{S^2}=4\pi .$$

דואליות באלגברה לינארית

משפט: Egregium של Gauss (תזכורת) $\qquad K=-\Delta_{LB}\log(f)$

$g_{ij}=f(u^1,u^2)\delta_{ij}$

V מרחב וקטורי

דוגמה: מישור משיק T_p למשטח M בנק' $p\in M$

הגדרה: תבנית לינארית (או 1-תבנית) ϕ על V היא העתקה לינארית
$\phi: V \to \mathbb{R}$

- **דוגמה:** במישור נתבונן בוקטור $v = v^1 e_1 + v^2 e_2$

1-תבנית dx מוגדרת ע"י $dx(v) = v^1 \in \mathbb{R}$

ואילו ה-1-תבנית dy היא $dy(v) = v^2 \in \mathbb{R}$

אם $v = 3e_1 + 4e_2$ אזי $dx(v) = 3 \quad dy(v) = 4$

הגדרה: תבנית ריבועית $dx^2(v) = (v^1)^2$

$dy^2(v) = (v^2)^2$

לדוגמה $dx^2(3e_1 + 4e_2) = 9 \quad dy^2(3e_1 + 4e_2) = 16$

(גם כל צירוף לינארי של dy^2, dx^2)

הגדרה: מרחב דואלי של V מסומן V^* היא אוסף של כל 1-תבניות על V

$V^* = \{\phi \mid \phi: V \to \mathbb{R} \text{ לינארית}\}$

אזי $\phi(v) \in \mathbb{R}$

הגדרה: העתקת evaluation

$< , >: V \times V^* \to \mathbb{R} \qquad <v, \phi> \to \phi(v)$

לכל $v \in V$ לכל $\phi \in V^*$ $<v, \phi> = \phi(v)$

הגדרה משפט: אם ל-V יש בסיס $(x_1, \dots, x_n)$ אזי ל-V^* יש בסיס $(y_1, \dots, y_n)$ (מינימלי)

המקיים $<x_i, y_j> = \delta_{ij}$ ונקרא בסיס דואלי.

כאשר δ_{ij} היא פונ' δ של Kronecker

- **דוגמה:** $V = \mathbb{R}^2$ בסיס (e_1, e_2) במרחב V^* יש בסיס (dx, dy)

דואליות באינפי וקרינטציות

E מרחב אוקלידי במימד n, $p \in E$ נק' שרירותית.

הגדרה: יהי $D_p = \{f : f \in C^\infty\}$ מרחב של פונ' C^∞ ממשיות

מוגדרות בסביבה כלשהי של p. (D_p מכיל למשל את כל הפולינומים).

משפט: נגזרת חלקית $\frac{\partial}{\partial u^i}$ בנק' p היא 1 תבנית על D_p

$\frac{\partial}{\partial u^i}: D_p \to \mathbb{R}$ המקיימת כלל Leibniz

$$\left.\frac{\partial(fg)}{\partial u^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right|_p g(p) + f(p)\left.\frac{\partial g}{\partial u^i}\right|_p$$

הגדרה: derivation X בנק' p היא 1-תבנית $X: D_p \to \mathbb{R}$ המקיימת

$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$.

משפט: מרחב של כל derivations בנק' $p\in E$ הוא מרחב וקטורי במימד n הנקרא המרחב המשיק T_p

הוכחה: כאשר $\dim E = 1$ בנק' $p=0$

$U: E \to \mathbb{R}$

תהי X derivation אזי $X(1)=X(1\cdot 1)=1X(1)+X(1)\cdot 1 = 2X(1)$

$\Rightarrow X(1)=0 \qquad \Rightarrow X(a)=0$

נתבונן בפולינום $u=u^1$ היא איבר ב- D_p

$X(u)=C\in\mathbb{R}$

נתבונן בפונ' שרירותית $f\in D_p$ מתקיימת נוסחת טיילור עם שארית

$f(u)=a+bu+g(u)u$

כאשר g היא רציפה $g(0)=0$

לכן על פי לינאריות של X מקבלים

$X(f)=X(a+bu+g(u)u)=X(a)+bX(u)+X(g(u)u)$
$\quad =0+bC+X(g(u)u)$

$X(g(u)u) = X(g)u|_{p=0}+g(0)X(u)=X(g)\cdot 0+0\cdot C=0$.

$X(f)=bc$. $\qquad c=X(u)$

$X(f)=c\frac{d}{du}(f)$

לכן $\frac{d}{du}$ הוא בסיס למרחב הדריבציה ולכן זהו מרחב ממימד 1.

בדרך דומה ניתן להוכיח למקרה הכללי.

משפט: יהיו $(u^1,\dots,u^n)$ קואורדינטות במרחב אוקלידי E אזי בסיס למרחב T_p הוא

$\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^n}\right)$

הגדרה: מרחב דואלי למרחב משיק T_p נקרא מרחב קו-משיק T_p^*

הגדרה: בסיס של T_p^* שהוא דואלי לבסיס $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ מסמנים $(du^1, du^2, \dots, du^n)$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, du^j \right\rangle = \delta_i^j \qquad du^j\frac{\partial}{\partial u^i}=\delta_i^j$

$\frac{\partial}{\partial u^i}\in T_p \qquad du^j: T_p\to\mathbb{R} \qquad du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\delta_i^j$

יריעות

תבניות בי-לינאריות מגלק 1 - תבניות

תבנית בילינארית B על V $\quad (v,w)\to B(v,w) \quad B: V\times V \to \mathbb{R}$

תבנית ריבועית Q המתאימה היא $\quad Q(v)=B(v,v).$

נוסחת פולריזציה:

$$B(v,w)=\frac{1}{4}\left(Q(v+w)-Q(v-w)\right)$$

$$B(v,w)=\frac{1}{2}\left(Q(v+w)-Q(v)-Q(w)\right)$$

$du^1,\dots,du^n$

$(du^1)^2,\dots,(du^n)^2$

- דוג: $n=2$

$V=V^1e_1+V^2e_2$

נתבונן בתבנית הריבועית $\quad Q=Edx^2+Fdy^2$

$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ בסיס של V

(dx,dy) בסיס של V^*

$du^i: V\to\mathbb{R}$

$$Q(v)=E(dx(v))^2+F(dy(v))^2=E(v^1)^2+F(v^2)^2$$

$v,v'\in V$

$$B(v,v')=Edx(v)dx(v')+Fdy(v)dy(v')=Ev_1v_1'+Fv_2v_2'$$

אם $E=1$, $F=1$

$$B(v,v')=v_1v_1'+v_2v_2'$$

$$B(v,v')=\frac{1}{4}\left(Q(v+v')-Q(v-v')\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(E(dx(v+v'))^2+F(dy(v+v'))^2-E(dx(v-v'))^2-F(dy(v-v'))^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(E(v_1+v_1')^2+F(v_2+v_2')^2-E(v_1-v_1')^2-F(v_2-v_2')^2\right)$$

$$=Ev_1v_1'+Fv_2v_2'$$

תבנית יסודית ראשונה

$I_p: T_p\times T_p\to\mathbb{R} \qquad g: T_p\times T_p\to\mathbb{R}$

בסיס ל T_p שהוא $\frac{\partial}{\partial u^i}$ בקואורדינטה u^i

$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ $\left|\frac{\partial}{\partial u^i}\right| = \sqrt{g_{ii}}$

בסיסים כואלים בגאומטריה דיפרנציאלית

בנק׳ $p=(u^1,u^2)$ יש מקדמים של מטריקה

$g_{ij}(u^1,u^2)$ $\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$

$$g = g_{11}(u^1,u^2)(du^1)^2 + g_{22}(u^1,u^2)(du^2)^2$$

$x=u^1$ $y=u^2$

$$g = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2$$

אם $g_{ij}=\delta_{ij}$ $g=dx^2+dy^2$ מטריקה שטוחה סטנדרטית של המישור

אם $g_{11}=g_{22}=\frac{1}{y^2}$ מקבלים מטריקה $\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$

מוגדרת בחצי מישור העליון נקראת מטריקה היפרבולית

$f=\frac{1}{y}$ $f^2(dx^2+dy^2)$

גורם קונפורמי.

$$K = -\Delta_{LB}\log f = -1$$

הוכחה:

$$K = -\Delta_{LB}\log f = -\frac{1}{f^2}\Delta_0 \log f = -y^2\Delta_0\log\frac{1}{y}$$
$$= y^2\Delta_0 \log y = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\log y)$$
$$= y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = y^2\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -1.$$

הגדרה: יריעה

קו׳ מעגל במישור

סתומה $x^2+y^2=1$

פרמטריזציה $t \to (\cos t, \sin t)$

גרף של פונ׳ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2}$

נק׳ בעייתיות $(1,0)$ $(-1,0)$

$x=g(y)=\sqrt{1-y^2}$

בסביבה של $(x=1,y=0)$

- דוג': הליקס $(x,y,z)=(\cos t,\sin t,t)$

הליקס הוא גרף של פונ' וקטורית f

$$(x(t),y(t))=f(t)=(\cos t,\sin t)$$

גרף של f הוא

$$\text{helix}\to(t,\cos t,\sin t)$$

- דוג': ספירה $S^2\subset\mathbb{R}^3$ גרף של הפונ'

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

הגדרה: יריעה 2 מימדית סגורה

היא תת קבוצה קומפקטית $\Sigma\subset\mathbb{R}^n$ כאשר בסביבה של כל נק' $p\in\Sigma$

הקבוצה Σ היא גרף של פונ' גזירה (pr ערכים וקטורים) בשני משתנים

הערה: (Σ,g)

בסימונים 12.5 S^2

בסיסים קואליים

מישור משיק T_p בסיס $\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2}\right)$ למרחב T_p מישור קו משיק T_p^*

בסיס (du^1,du^2) המקיימים $du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)=\delta^i_j$

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle$$

במקרה אלכסוני.

$$g=g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2$$

מטריצת Jacobi

$u=(u^1,u^2)$

$V=V(u)$ פונ' וקטורית $V=(V^1,V^2)$

$$V(u^1,u^2)=(V^1(u^1,u^2),V^2(u^1,u^2))$$

$$Jac_V(u)=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial V^1}{\partial u^1} & \frac{\partial V^2}{\partial u^1}\\ \frac{\partial V^1}{\partial u^2} & \frac{\partial V^2}{\partial u^2}\end{bmatrix}$$

לכל פונ' f בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ מתקיים

$$\int_{\text{"}D\text{"}}f(v)\,dv^1dv^2=\int_{\text{"}D\text{"}}g(u)\,Jac_V(u)\,du^1du^2$$

כאשר $g(u)=f(V(u))$

- דוג': $u^1=r$ $u^2=\theta$

$V^1=x$ $V^2=y$

$$dv^1dv^2=dxdy=Jac_V(u)\,du^1du^2$$

$$dxdy=r\,dr\,d\theta$$

שטח של משטח

הגדרה: אלמנט של שטח dA הוא $dA=\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$

$$area(\Sigma)=\int_\Sigma dA=\sum_{\{U\}}\int_U\sqrt{\det(g_{ij})}\,du^1du^2$$

משפט: שטח הוא בלתי תלוי בבחירת שילוט (כיזוגים).

הוכחה: סביבה (u^i) זהה ל (v^α)

שיכון אוקלידי

$$x=x(u)=x(u^1,u^2)$$

$$g_{ij}=\langle x_i,x_j\rangle_{\mathbb{R}^n}\qquad V=v(u)\quad u=u(v)$$

$$y=y(v)=x(u(v))$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}=\left\langle\frac{\partial y}{\partial v^\alpha},\frac{\partial y}{\partial v^\beta}\right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

לפי כלל השרשרת

$$=\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha},\frac{\partial x}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}\right\rangle=\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}\left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i},\frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle$$

$$=\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}g_{ij}=Jac_v u\,\det g_{ij}\,Jac_v u=(Jac_v u)^2\det(g_{ij})$$

לכן

$$\int dA=\int\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\,dv^1dv^2=\int Jac_v u\sqrt{\det g_{ij}}\,dv^1dv^2$$

$$=\int\cancel{Jac_v u}\sqrt{\det(g_{ij})}\,\cancel{Jac_u v}\,du^1du^2$$

$$=\int\sqrt{\det g_{ij}}\,du^1du^2=\int dA$$

שקילות קונפורמית

הגדרה: שתי מטריקות $g=g_{ij}du^idu^j$ ומטריקה $h=h_{ij}du^idu^j$

הן שקולות קונפורמית אם קיימת פונ' $f(u^1,u^2)>0$ כאשר

$$g_{ij}=f^2h_{ij}\quad\forall i,j$$

משפט Uniformisation

משפט: כל מטריקה על משטח קש״ר היא שקולה קונפורמית למטריקה בעקמומיות גאוס קבועה.

משטחי סיבוב בקואורדינטות איזותרמיות

$(f(\varphi),g(\varphi))$ במישור $[x\ z]$

$$x(\theta,\varphi)=(f(\varphi)\cos\theta,f(\varphi)\sin\theta,g(\varphi))$$

$$u^1=\theta\qquad u^2=\varphi$$

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}f^2&0\\0&\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2\end{bmatrix}\qquad g(\theta,\varphi)=f^2d\theta^2+\left[\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2\right]d\varphi^2$$

<u>למה:</u> נתבונן בפרמטריזציה $(f(\varphi), g(\varphi))$ של עקומה (כאשר $f>0$)
נבנה משטח סיבוב המתאים אז שינוי של קואורדינטות
בהנחה ש-φ הוא במהירות יחידה
$$\psi(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)}$$
מגדיר פרמטריזציה איזותרמית ביחס ל-(θ, ψ)
כאשר תבנית יסודית הראשונה היא
$$g_{ij} = f^2(\varphi(\psi))\delta_{ij}$$
$$g = f^2(\varphi(\psi))(d\theta^2 + d\psi^2)$$
<u>הוכחה:</u> $\varphi = \varphi(\psi)$ לפי כלל השרשרת
$$\frac{df(\varphi(\psi))}{d\psi} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}$$
$$g_{ij}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{g}_{ij}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} f(\varphi(\psi))^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 \end{bmatrix}$$
$$g_{11} = g_{22}$$
$$f^2 = \left(\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2 = \left(\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2\right)\left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2$$
ניתן להניח שפרמטר φ הוא במהירות יחידה
$$\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)^2 = 1$$
$$f^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\psi}\right)^2$$
$$f(\varphi(\psi)) = \frac{d\varphi}{d\psi}$$
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{f(\varphi)}$$
$$\psi(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)}$$

<u>פרמטר קונפורמי τ של טורוס סיבוב</u>

<u>מסקנה:</u> נתבונן בעקומת Jordan במישור באורך L עם פרמטריזציה במהירות יחידה $(f(\varphi), g(\varphi))$ כאשר $f(\varphi)>0$ $\varphi \in [0, L]$
נבנה טורוס כמשטח סיבוב המתאים אזי הטורוס הוא שקול קונפורמי לטורוס שטוח $\mathbb{R}^2/L_{c,d}$
כאשר $\mathbb{R}^2$ הוא מישור (θ, ψ) ושריג $L_{c,d}$ הוא שריג "מלבני" נפרש ע"י וקטורים

$\frac{\partial}{\partial\theta}$ ל c וגם $d\frac{\partial}{\partial\psi}$ כך ש $L_{c,d}=c\mathbb{Z}+d\mathbb{Z}$ כאשר $c=2\pi$ ואילו $d=\int_0^L\frac{d\varphi}{f(\varphi)}$

הוכחה: בהוכחה של הלמה מצאנו ψ כאשר (θ,ψ) הן קואורדינטות איזותרמיות על הטורוס כמו לגבי כל משטח סיבוב $\theta\in[0,2\pi]$ לכן $c=2\pi$

מצד שני $\psi=\int\frac{d\varphi}{f(\varphi)}$ כאשר φ עובר על כל עקומת Jordan $L\in[0,2\pi]$

פרמטר ψ משתנה בין 0 לבין $d=\int_0^L\frac{d\varphi}{f(\varphi)}$

מסקנה: פרמטר קונפורמי τ של טורוס סיבוב הוא מדומה טהור $\tau=i\sigma^2$ כאשר

$$\sigma^2=\max\left\{\frac{c}{d},\frac{d}{c}\right\}\geq 1.$$