תרגיל בית 7 - פתרון

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב $\mathbb{R}$ מדידות בורל וכי לא כל פונקציה רציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

א. הגדירו את הפונקציה $g=\varphi+x$ המוגדרת על הקטע $[0,1]$ כאשר φ הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי g רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל $[0,2]$.

ב. הראו כי $g([0,1]\setminus C)$ הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1 .מכאן שלקבוצה $g(C)$ מידה 1 כאשר C הינה קבוצת קנטור.

ג. השתמשו בעובדה כי אם E הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה $M\subseteq E$ כך ש M איננה מדידה לבג(לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב $[0,2]$ כך ש $K=g^{-1}(M)$ הינה מדידה לבג.

ד. הראו כי K איננה מדידה בורל וכי $g(K)=M$.

2. תהי $f\geq 0$ פונקציה מדידה ואי-שלילית המקיימת $\int_X fd\mu=0$, הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית-ממש היא בעלת מידה 0.

<u>פתרון:</u>

נגדיר $E:=\{x\in X:f(x)>0\}$, ו-$f_n(x)=n\cdot f(x)$. קל לראות שהסדרה $\{f_n\}$ עומדת בתנאי משפט ההתכנסות המונוטונית ולכן $\int_X\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot f\right)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X nfd\mu=\lim_{n\to\infty}n\cdot\int_X fd\mu=0$.

נניח בשלילה כי $\mu(E)>0$, $X\supseteq E$ ולכן $\int_X\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot f\right)d\mu\geq\int_E\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot f\right)d\mu$. אבל לכל $x\in E$ מתקיים $f(x)>0$ ולכן $\left(f_n|_E\right)(x)=n\cdot f(x)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$. בסה"כ קיבלנו: $\int_X\left(\lim_{n\to\infty}n\cdot f\right)d\mu\geq\int_E(\infty)d\mu=\infty\mu(E)=\infty$. זו סתירה ולכן מש"ל.

3. תהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu(X)<\infty$ אזי f אינגרבילית וגם $\int f_n\to\int f$.

פתרון: מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 גדול מספיק עבורו $\left| f - f_n \right| < \varepsilon$ לכל x ולכל $n > n_0$. נסמן $h_n = f - f_n$ מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות החסומה נובע כי f אינטגרבילית וגם $\lim_{n\to\infty} \int h_n = \lim_{n\to\infty} \int f - f_n = 0 \Rightarrow \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

שאלת בונוס: (לא חייבים)

יהי X מרחב מטרי , $\mathfrak{B}$ הסיגמא – בורל ו μ המידה על $(X, \mathfrak{B})$, אזי תומך (Support) של μ הינו הקבוצה הקטנה ביותר F של קבוצות סגורות כך ש $\mu(F^c) = 0$. הראו כי אם F הינה קבוצה סגורה ב $[0,1]$, אזי קיימת מידה סופית על $[0,1]$ כך ש התומך שלה הוא F .