מד"ר תרגול 6

17 בנובמבר 2013

המשך משפט הקיום והיחידות

1. ראינו שלמשפט הקיום והיחידות יש אופי מקומית כלומר הוא מבטיח לנו פתרון יחיד בסביבה קטנה של הנקודה.
2. ראינו כי המשפט נותן תנאי מספיק לקיום פתרו יחיד אבל לא הכרחי
3. רציפות של f היא תנאי מספיק לקיום פתרון למד"ר אבל לאו דווקא פתרון יחיד.

דוגמה 1: קבע האם קיים פתרון יחיד למשוואה $y\prime=y^{x^2+1}$.

פתרון 1: נסמן $f(x,y)=y^{x^2+1}$. ברור שf רציפה. $f_y\prime(x,y)=(x^2+1)y^{x^2}$גם רציפה ולכן מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות כלומר קיים פיתרון יחיד למשוואה.

דוגמה 2: נתונה המשוואה $\begin{cases} y\prime=y^{\frac{1}{3}} \\ y(0)=0 \end{cases}$. קבע האם קיים פתרון יחיד למשוואה

פתרון: נסמן $f(x,y)=y^{\frac{1}{3}}$ וברור שf רציפה. $f_y\prime(x,y)=\frac{1}{3}\cdot y^{-\frac{2}{3}}$ גם רציפה בכל נקודה פרט ל$y=0$. נעשה הפרדת משתנים: $\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{3}},\frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}}=dx$

$$\begin{aligned} \frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} &= x+c \\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3}(x-c) \end{aligned}$$

כדי לקבל את y בצורה המפורשת, נרשום $y=\pm\left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{\frac{3}{2}}$. כדי שיתקיים תחום ההגדרה נדרוש ש$x\geq c$. נגדיר את y_1 באופן הבא:

$$y_1=\begin{cases} 0 & ,x\leq c \\ \left[\frac{2}{3}(x-c)\right]^{1.5} & ,x>c \end{cases}$$

ובאופן דומה עבור הסימן השלילי את y_2. הפונקציות y_1,y_2 גזירות ברציפות ולכן כל אחת מהפונקציות היא פתרון של המד"ר, כלומר אין פתרון יחיד. התשובה הסופית: לא קיים פיתרון יחיד.

דוגמה 3 נתונה המשוואה $\begin{cases} y\prime = 2e^x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. מצא פתרון כללי למשוואה.

פתרון 3 נסמן $f(x,y) = 2e^x - y$. ברור שf רציפה וf_y רציפה לכן קיים פתרון יחיד למשוואה. ע"י ניחוש קל לראות ש$y = e^x$ מקיים את תהמשוואה ועפ"י משפט הקיום והיחידות $y = e^x + c$ הוא הפתרון שלנו.

תלות לינארית בין פונקציות

הגדרה: קבוצה של n פונקציות המוגדרות בקטע I נקראות קבוצה תלויה לינארית אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של הפונקציות שמתאפס בכל הקטע, כלומר $\sum c_i f_i(x) = 0$ כך שלא כל הc_iים שווים 0.

דוגמה 4: נתונות f_1, f_2 פונקציות ת"ל בקטע. הראה שגם g_1, g_2 ת"ל כאשר $g_1 = f_1 + f_2, g_2 = f_1 - f_2$.

פתרון 4: ר"ל $\alpha g_1 + \beta g_2 = 0$ כאשר $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\begin{aligned} \alpha g_1 + \beta g_2 &= \alpha(f_1 + f_2) + \beta(f_1 - f_2) \\ &= (\alpha + \beta) f_1 + (\alpha - \beta) f_2 = 0 \end{aligned}$$

נניח שקיימות $c, d \neq 0$ כך ש$cf_1 + df_2 = 0$. ניקח $\begin{cases} c = \alpha + \beta \\ , d = \alpha - \beta \end{cases} \Leftarrow \alpha = \frac{c+d}{2}, \beta = \frac{c-d}{2}$

. לכן g_1, g_2 ת"ל בקטע.

וורנוסיקאן של פונקציות

הגדרה: תהיינה $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ סדרת פונקציות בעלות $n-1$ נגזרות בקטע I. הוורנוסקיאן של הפונקציות הוא:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f\prime_1 & f_2\prime & \dots & f_n' \\ & \vdots & \vdots & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

אם הפונקציות ת"ל אזי $W(x) = 0$ בכל הקטע.

הערה: אם $W(x) \neq 0$ אז הפונקציות בת"ל וההפך לא בהכרח נכון.

דוגמה 5: התבונן בפונקציות $\begin{matrix} f_1 = x^2 \\ f_2 = x \cdot |x| \end{matrix}$. הוכח:

1. שתי הפונקציות גזירות בכל הקטע $[-1, 1]$.
2. הוורונסקיאן שלהן מתאפס בכל הקטע $[-1, 1]$.
3. שתי הפונקציות בת"ל בקטע $[-1, 1]$.
4. הפונקציות ת"ל בקטע $[0, 1]$.

הוכחה 5:

1. f_1 גזירה בבירור. את f_2 נכתוב באופן הבא: $f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$. אם נבדוק לפי ההגדרה נקבל $f_2\prime(0) = 0$ ולכן f_2 גם גזירה.
2. נחלק למקרים. אם $x \geq 0$: $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$. אם $x < 0$: $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$.
3. צריך להראות שהפונקציות בת"ל. נסתכל על הצירוף הלינארי $c_1f_1 + c_2f_2 = 0$. נחלק לשני תחומים: עבור $x \in [0,1]$:

$$c_1 + c_2 = 0 \Leftarrow x^2 + c_2x^2 = 0$$

. עבור הקטע $x \in [-1,0]$:

$$c_1 = c_2 = 0 \Leftarrow c_1 - c_2 = 0 \Leftarrow c_1x^2 - c_2x^2 = 0$$

$\Leftarrow$הפונקציות בת"ל על הקטע $[-1,1]$.
4. בקטע $[0,1]$ הפונקציות מתלכדות ולכן בטוח שהן ת"ל.

מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית

הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית הם בת"ל $\Leftrightarrow$ הוורונסקיאן שלהם שונה מ־0 בכל הקטע.

דוגמה 6: האם קיימת משוואה מהצורה $y\prime\prime\prime + P_2(x)y\prime\prime + P_1(x)y\prime + P_0(x) = 0$. בעלת מקדמים רציפים בקטע $(-1,1)$ כך שהפונקציות x, x^2, x^3 הן פתרונותיה.

פתרון: נתבונן ב$W(x)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3$$

נשים לב שבנקודה $x = 0$ מתקיים $W = 0$ ולכן לא יכול להיות שהפונקציות הינה פיתרון של המשוואה. אחרת , בכל הקטע W היה שונה מ0.

הערה: במקרה שלנו אכן קבוצת הפתרונות בת"ל ולכן מחייב שאינן פתרונות של המשוואה.

דוגמה 7: הוכח כי $W(x)$ של שני פתרונות המשוואה $y\prime\prime + P_1(x)y\prime + P_0(x)y = 0$. מקיים את המשוואה: $W\prime(x) + P_1(x)W(x) = 0$.

פתרון: נסמן את הפתרונות $y1, y_2$ ונסתכל על הוורונסקיאן: $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y\prime_1 & y_2\prime \end{vmatrix} = y1y_2\prime - y_2y_1\prime$. $W\prime(x) = y_1y_2\prime\prime - y_1\prime\prime y_2$. הצבה במשוואה תיתם: $W\prime(x) + P_1(x)W(x) = 0$.

משוואות הומוגניות לינאריות מסדר שני עם מקדמים קבועים

נתונה המשוואה $ay'' + by' + cy = 0$. נציב $y = e^{\lambda x}$ ונקבל $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Leftarrow$ $(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$.

ישנן 3 אפשרויות לפתרון:

1. אם $\Delta > 0$ אז יש שני שורשים ממשיים שונים והפתרון $y = c_1e^{\lambda_1 x} + e_2e^{\lambda_2 x}$.
2. אם $\Delta = 0$אז יש שורש ממשי אחד עם ריבוי 2 והפתרון הוא $y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$.
3. אם $\Delta < 0$ השורשים מרוכבים $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ואז הפתרון כללי הוא $y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

דוגמה 8: פתור את המשוואה $y'' + 6y' + 25y = 0$.

פתרון: במקרה זה $a = 1, b = 6, c = 25$. נסתכל ב$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ שפתרונותיה $\lambda_{1,2} = -3 \pm 4i$ ולכן הפתרון הוא:

$$\boxed{y = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)}$$

דוגמה 9 $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$

הערה:

במקרה של משוואות לא הומוגניות נפתור את המשוואה ההומוגנית ונמצא פיתרון פרטי.

פתרון: משוואה הומוגנית

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 8y &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda - 8 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2, -4 \\ \underbrace{y_h}_{\text{hom. sol.}} &= c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} \end{aligned}$$

כעת נמצא פתרון פרטי. הפיתרון הפרטי הוא מהצורה $y_p = ae^{3x}$. נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} 9ae^{3x} + 6ae^{3x} - 8ae^{3x} &= e^{3x} \\ 7ae^{3x} &= e^{3x} \\ a &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

לכן $y_p = \frac{1}{7}e^{3x}$ ולכן הפתרון הכללי למד"ר הוא $y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{7}e^{3x}$.

דוגמה 10: $y'' + y' = 2x^2$

פתרון: חלק הומוגני:

$$\begin{aligned} \lambda^2+\lambda &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 0,-1 \\ y_h &= c_1+c_2e^{-x} \end{aligned}$$

כיוון ו0 הוא שורש של הפולינום האופייני ננחש פתרון כפולינום מדרגה 3:

$$y_p = ax^3+bx^2+cx$$

נציב במשוואה ונקבל $a=\frac{2}{3}, b=-2, , c=4$ ולכן הפתרון הפרטי הוא $y_p=\frac{2}{3}x^3-2x^2+4x$. לכן $y=y_h+y_p=c_1+c_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+4x$

דוגמה 11 $y\prime\prime+2y\prime+y=\sin(2x)$

פתרון: חלק הומוגני:

$$\begin{aligned} \lambda^2+2\lambda+1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -1 \\ y_h &= c_1e^{-x}+c_2xe^{-x} \end{aligned}$$

פתרון פרטי: $y_p=a\sin(2x)+b\cos(2x)$. נציב במשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} \sin(2x)(-4b-3a)+\cos(2x)(4a-3b) &= \sin 2x \\ \Rightarrow \begin{cases} -4b-3a=1 \\ 4a-3b=0 \end{cases} & \Rightarrow a=-\tfrac{4}{25}, \quad b=\frac{-3}{25} \\ y_p &= -\frac{4}{25}\sin 2x-\frac{3}{25}\cos 2x \\ \Rightarrow y=y_h+hp &= c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+-\frac{4}{25}\sin 2x-\frac{3}{25}\cos 2x \end{aligned}$$