פתרון תרגיל בית 8 אלגברה מופשטת 2

1. יהי R חוג קומוטטיבי נותרי. ויהי $P \lhd R$ אידיאל ראשוני. הוכיחו כי המיקום $R_P = (R-P)^{-1}R$ הוא גם חוג נותרי.

פתרון:

לפי ההתאמה של אידיאלים, שרשרת אידיאלים של R_p מתאימה לשרשרת אידיאלים של R (המוכלים בP).

התאמה זו שומרת על הכלה ועל הכלה ממש, ולכן אם בR_p הייתה שרשרת עולה אינסופית, גם בR הייתה כזאת- בסתירה לנותריות.

2. יהי F שדה. הראו כי החוג $R = F[x, xy, xy^2, xy^3, \dots] \subseteq F[x,y]$ הוא לא נותרי.

פתרון:

נתבונן בשרשרת האידיאלים $\langle x\rangle \subsetneqq \langle x, xy\rangle \subsetneqq \langle x, xy, xy^2\rangle \subsetneqq \dots$

נוכיח שאין פה שיוויונות:

בשלילה נקח $xy^n \in \langle x, xy, \dots, xy^{n-1}\rangle$ עבור הn המינימלי שזה קורה.

זה אומר ש

$$\begin{aligned} xy^n &= p_0x + p_1xy + \cdots + p_{n-1}xy^{n-1} \\ y^n &= p_0 + p_1y + \cdots + p_{n-1}y^{n-1} \end{aligned}$$

(שימו לב שהמשוואה השנייה היא בחוג $F[x,y]$ ולא בR!)

מההנחה על המינימליות של $\cancel{n}$ $y \nmid p_0 + p_1y + \cdots + p_{n-1}y^{n-1}$.

נציב $y=0$ ונקבל $p_0(x,0)=0$

אבל מהמבנה של איברים בR ($c_0 + c_1xy + c_2xy^2 + \cdots + c_mxy^m$)

זה אומר ש $y \mid p_0$ מה שגורר $\cancel{ש}$ $y \mid p_0 + p_1y + \cdots + p_{n-1}y^{n-1}$ בסתירה להנחה.

שימו לב שבכך מצאנו דוגמא לתת חוג של חוג נותרי שאיננו נותרי!

3. חשב את ה gcd של $85, 1+13i$ ב$\mathbb{Z}[i]$.

פתרון: $6-7i$

4. מצא יוצר של האידיאל $\langle 47-13i, 53+56i\rangle$ ב$\mathbb{Z}[i]$.

פתרון: $4+5i$

5. חשבו את המנה והשארית בחלוקה של 63 ב$\frac{1}{2}\left(11+5\sqrt{-11}\right)$ בחוג $\mathcal{O}_{-11}$.
פתרון:

$$\frac{63}{\frac{1}{2}\left(11+5\sqrt{-11}\right)}\frac{\frac{1}{2}\left(11-5\sqrt{-11}\right)}{\frac{1}{2}\left(11-5\sqrt{-11}\right)}=\frac{2(693-315\sqrt{-11})}{396}\approx\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-11}$$

מנה: $\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-11}$ שארית: $63-\left(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{1}{2}\left(11+5\sqrt{-11}\right)\right)=$
$\frac{1}{2}(5-\sqrt{-11})$. (בדקו שהנורמות תקינות!)

6. יהי $d\equiv 1 \pmod 4$

(א) הוכח כי 2 הוא אי-פריק ב$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
נניח בשלילה $2=(a+b\sqrt{d})\cdot z$,
מכפליות הנורמה $4=(a^2-db^2)N(z)$.
כדי שהפירוק לא יהיה טריוויאלי צריך להתקיים:
$2=a^2-db^2\equiv a^2-b^2 \pmod 4$
ואין לזה פתרון!

(ב) הוכח כי $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא לא תפ"י.
פתרון:
$\left(1+\sqrt{d}\right)^2=1+d+2\sqrt{d}=2\cdot\left(\frac{d+1}{2}+\sqrt{d}\right)$.
(שימו לב ש $\frac{d+1}{2}$ הוא מספר שלם בגלל ההנחה על d).
הראנו בסעיף הקודם ש2 הוא אי-פריק.
אם החוג היה תפ"י אז 2 היה גם ראשוני, ואז $2\mid\left(1+\sqrt{d}\right)$ גורר ש $2\mid 1+\sqrt{d}$
אבל זה לא קורה בחוג (הראו למה, חישוב ישיר).

7. הסבר מדוע העובדה ש $6=2\cdot 3=\left(1+\sqrt{7}\right)\left(-1+\sqrt{7}\right)$ לא סותר את העובדה ש$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ הוא תפ"י.
פתרון:
נשים לב שאלו לא גורמים אי-פריקים!
למשל $2=(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})$.
אם נמשיך לפרק כל אחד מהגורמים, נקבל בסוף גורמים זהים (עד כדי חברות).
חשבו את הגורמים האלו... זה אימון טוב בלפרק דברים.

8. יהי $2\le n\in\mathbb{N}$, הראו ש$\mathbb{Z}[in]\subseteq\mathbb{C}$ הוא לא תפ"י.
(רמז: ni הוא אי-פריק אבל לא ראשוני. היעזרו בנורמה של $\mathbb{Z}[i]$.)
פתרון:
ראשית נשים לב שin לא הפיך כי $N(in)=n^2\neq\pm 1$. (זה מראה שהוא לא הפיך

ב$\mathbb{Z}[i]$ וקל וחומר שלא בחוג שלנו).

נראה שהוא אי-פריק:

נניח $xy = ni$ אז לפחות אחד מהגומרים חייב להיות לא ממשי. בה"כ $x = a + inb$ עבור $b \neq 0$.

אז $n^2 = N(x)N(y) = \left(a^2 + n^2b^2\right)N(y) \geq n^2N(y)$ ⇐ $N(y) \leq 1$ ⇐ $N(y) = 1$.

מה שאומר שהפירוק לא אמיתי.

נראה שהוא לא ראשוני:

$in|n^2$ אבל $in \nmid n$ בחוג שלנו. (שימו לב ש-i לא נמצא בחוג שלנו).

אבל בתפ"י כל אי-פריק הוא ראשוני- ולכן החוג הוא לא תפ"י!