תרגיל בית 6 אלגברה מופשטת 2

1. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$. כאשר $S = \left\{ n^k \mid k = 0, 1, 2, \dots \right\}$.

   (א) מהם האידיאלים ב$\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$?

   (ב) הוכיחו כי עבור מספר ראשוני p, לא קיים חוג R כך ש $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

   (ג) הוכיחו כי אם $m|n$ אז $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ ושאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ אז זוהי הכלה ממש.

   (ד) מהו היחס ($=, \subseteq, \supseteq$) בין $\mathbb{Z}[\frac{1}{18}]$ ו $\mathbb{Z}[\frac{1}{12}]$?

   (ה) מצאו שרשרת חוגים $\mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}] \subsetneqq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_2}] \subsetneqq \mathbb{Z}[\frac{1}{n_3}] \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{Q}$.

2. (א) הוכיחו כי $\langle x^2 - 2 \rangle$ הוא אידיאל ראשוני ב$\mathbb{R}[x]$.

   (ב) מיהו האידיאל המקסימלי במיקום $\mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle}$?

   (ג) נסמן בM את האידיאל מהסעיף הקודם. למה איזומורפית המנה $\mathbb{R}[x]_{\langle x^2-2 \rangle}/M$?

3. יהי $d \in \mathbb{N}$ חופשי מריבועים, הוכח ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

4. נניח $S^{-1}R$ הוא חוג מקומי. האם הוא $R_{(P)}$ לאיזשהו אידיאל ראשוני P?

5. יהי R חוג קומוטטיבי. ויהיו $I, J \lhd R$ אידיאלים.
   עבור אידיאל ראשוני P, $I_{(P)}, J_{(P)}$ הם האידיאלים המתאימים במיקום $R_{(P)}$.
   הוכיחו כי אם לכל אידיאל ראשוני P מתקיים $I_{(P)} = J_{(P)}$ אזי $I = J$.

6. יהי R תח"ש ו $S \subseteq R$ תת חוג.

   (א) הוכיחו כי קיים שיכון $q(S) \subseteq q(R)$.

   (ב) הוכיחו כי יש שיוויון אם"ם לכל $0 \neq x \in R$ יש $s \in S$ כך ש $xs \in S$.