תרגיל 2 – מתמטיקה בדידה

חלק א'

בכל אחת מהשאלות הבאות בחרו תשובה אחת בלבד. במקרה שיש יותר מתשובה אחת נכונה, בחרו את התשובה הנכונה והמדוייקת ביותר.

1. נתבונן בקבוצות $A_1=\phi$, $A_2=\{\phi\}$, $A_3=\{\{\phi\}\}$ ו $A_4=\{\phi,A_3\}$. אזי:

א. $A_1 \setminus A_3 \neq \phi$ או $A_4 \setminus A_1 \neq A_4$.

ב. $A_2 \in A_3$ וגם $A_3 \cap A_4 = A_1$.

ג. $A_4 \subseteq A_3$ וגם $A_1 \in A_4$.

ד. $A_1 \in A_2$ וגם $A_2 \cap A_4 = A_1$.

תשובה: ב.

2. יהיו A,B קבוצות כך ש $(A\setminus B)\cup B = A$, אזי בהכרח:

א. $A\cap B=\phi$.

ב. $A\setminus B=\phi$.

ג. $B\setminus A=\phi$.

ד. $A\setminus(A\cap B)=\phi$.

תשובה: ג.

3. נתונות הקבוצות $B=\{\phi,\{\phi\}\}$, $A=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$.

א. A אינה מוכלת ב $P(A)$.

ב. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ג. $A\subseteq P(B)$.

ד. $P(B)\setminus A=\{B\}$.

תשובה:ג.

4. תהא $A=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$. אזי:

א. $A=P(\{\phi,\{\phi\}\})$.

ב. לכל $B\neq A$, $A\cap B=\phi$.

ג. $A=(\phi,\{\phi\})$ (לפי הגדרת זוג סדור).

ד. לכל $a\in A$ מתקיים $a\subseteq A$.

תשובה: ד.

5. בקבוצה $\{0,1,2\}\times P(P(P(\{0\})))$ יש בדיוק:

א. 48 איברים.

ב. 24 איברים.

ג. 12 איברים.

ד. 64 איברים.

תשובה: א.

6. לכל $n \in Z$, תהי $A_n = \{x \in R : x < n\}$. אזי:

א. לכל תת קבוצה סופית F של Z, $\bigcap_{n\in F} A_n$ היא אינסופית, אבל $\bigcap_{n\in Z} A_n = \phi$.

ב. לכל תת קבוצה סופית F של Z, $\bigcap_{n\in F} A_n$ היא אינסופית, ולכן $\bigcap_{n\in Z} A_n$ היא אינסופית.

ג. יש תת קבוצה סופית F של Z כך ש $\bigcup_{n\in F} A_n = R$.

ד. יש תת קבוצה סופית F של Z כך ש $\bigcap_{n\in F} A_n = \phi$.

תשובה: א.

7. נתון $\{a,b\} = \{c,d\}$. אזי בהכרח:

א. $b = c$ וכן $a = d$.

ב. כל התשובות נכונות.

ג. אם ד' אינו מתקיים אז בהכרח א' מתקיים.

ד. $a = c$ וכן $b = d$.

תשובה: ג.

8. עבור קבוצה סופית B, הסימון $|B|$ משמעו, מספר האיברים ב B.

סמנו את הטענה הנכונה:

א. על קבוצה שבה ארבעה איברים יש בדיוק חמישה יחסי שקילות.

ב. אם R ו S הם יחסי שקילות, אז גם $R \cap S$ יחס שקילות.

ג. אם $|A| = n$ אז אין יחס שקילות E על A כך ש $|E| = n$.

ד. אם R ו S הם יחסי שקילות, אז גם $R \cup S$ יחס שקילות.

תשובה: ב.

9. תהי A קבוצה סופית ולא ריקה ויהי E יחס על $P(A)$ המוגדר ע"י

$E = \{(X,Y) \in P(A) \times P(A) : |X| \le |Y|\}$.

א. E הוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

ב. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ג. E הוא רפלקסיבי וסימטרי.

ד. E הוא סימטרי וטרנזיטיבי.

תשובה: א.

10. יהי ~ יחס שקילות על N כך שיש 4 מספרים טבעיים שונים i, j, k, m המקיימים: לכל $n \in N$ יש $t \in \{i, j, k, m\}$ כך ש $n \sim t$. אזי:

א. $1 \le |\{[n] : n \in N\}| \le 4$.

ב. $|\{[n] : n \in N\}| = 4$

ג. $|\{[n] : n \in N\}| > 5$

ד. $0 \le |\{[n] : n \in N\}| \le 4$

תשובה: א.

11. יחס שקילות E מוגדר על הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$. מספר הזוגות השייכים ל E הוא 9.
אפשרי כי מחלקות השקילות של E הן:
א. $\{1\},\{2,3,4,5\}$.
ב. כל התשובות האחרות אינן נכונות.
ג. $\{1,2,3\},\{4,5\}$.
ד. $\{1,2\},\{3,4\},\{5\}$.

תשובה: ד.

<u>חלק ב'</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
סמנו לגבי כל אחת מהן, אם היא נכונה או לא.

1. יהיו A,B קבוצות. אזי, התכונות הבאות שקולות:
א. $A\subseteq B$.
ב. $A\cup B=B$.
ג. $A\cap B=A$.
ד. $A\setminus B=\phi$.
ה. $A\Delta B\subseteq B$.

תשובה: נכון.

הוכחה:
א$\Leftarrow$ב: נתון $A\subseteq B$ צ"ל: $A\cup B=B$. נוכיח הכלה דו כיוונית:
$A\cup B\supseteq B$: נכון תמיד.
$A\cup B\subseteq B$: יהי $x\in A\cup B$ אזי $x\in A$ או $x\in B$. אם $x\in B$ סיימנו. אחרת, מכיוון ש $A\subseteq B$, $x\in A \Leftarrow x\in B$.

ב$\Leftarrow$ג: נתון $A\cup B=B$ צ"ל: $A\cap B=A$. נוכיח הכלה דו כיוונית:
$A\cap B\supseteq A$: יהי $x\in A$. צ"ל $x\in A\cap B$ לכן מ"ל $x\in B$. אבל, $x\in A \Leftarrow x\in A\cup B$
ומהנתון כי $A\cup B=B$, נובע $x\in B$.
$A\cap B\subseteq A$: נכון תמיד.

ג$\Leftarrow$ד: נתון $A\cap B=A$ צ"ל: $A\setminus B=\phi$. כלומר, צ"ל כי לכל x, $x\notin A\setminus B$.
נניח בשלילה כי קיים $x\in A\setminus B$. אזי $x\in A$ וגם $x\notin B$.
אבל $x\in A=A\cap B \Leftarrow x\in B$. סתירה.

ד$\Leftarrow$ה: נתון $A\setminus B=\phi$ צ"ל: $A\Delta B\subseteq B$.
יהי $x\in A\Delta B$. הוכחנו בכיתה כי $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ לכן $x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

לכן, $x \in A \setminus B$ או $x \in B \setminus A$. נתון כי $A \setminus B = \phi$ לכן $x \notin A \setminus B$. לכן $x \in B \setminus A$. בפרט, $x \in B$.

ה⇐א: נתון $A\Delta B \subseteq B$ צ"ל: $A \subseteq B$.
יהי $x \in A$. צ"ל $x \in B$. נניח בשלילה כי $x \notin B$. אזי, $x \in A \setminus B$. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
לכן $x \in A\Delta B$. אבל לפי הנתון, $A\Delta B \subseteq B$. לכן, $x \in B$. סתירה.

2. תהי A קבוצה. אזי ל $P(P(A))$ ול $P(P(P(A)))$ יש לפחות שלושה איברים משותפים.

תשובה: לא נכון.

דוגמה נגדית: תהי $A = \phi$ אזי $P(A) = \{\phi\}$ ו $P(P(A)) = \{\phi, \{\phi\}\}$.
מכיוון שב $P(P(A))$ יש רק שני איברים, לא ייתכן כי החיתוך שלה עם $P(P(P(A)))$ יכיל שלושה איברים משותפים.

3. יהיו A, B, C, D קבוצות. אזי: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

תשובה: נכון.

הוכחה: צ"ל כי לכל (x, y),
$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.
אכן, לכל (x, y):

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (y \in C \cap D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}$$

4. יהיו A, B, C, D קבוצות. אזי: $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

תשובה: לא נכון.
דוגמה נגדית: יהיו $A = \phi, B = \{1\}, C = \{2\}, D = \phi$ אזי:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (\phi \cup \{1\}) \times (\{2\} \cup \phi) = \{1\} \times \{2\} = \{(1,2)\}$$

$$(A \times C) \cup (B \times D) = (\phi \times \{2\}) \cup (\{1\} \times \phi) = \phi \cup \phi = \phi$$

ובפרט $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$

5. יהיו R, S שני יחסים בקבוצה לא ריקה A.
א. אם R, S רפלקסיביים אז גם $R \cap S$ רפלקסיבי.
תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $a \in A$. צ"ל $(a, a) \in R \cap S$. אבל, R, S רפלקסיביים. לכן, $(a, a) \in R$ ו $(a, a) \in S$. לכן, $(a, a) \in R \cap S$.

ב. אם R, S רפלקסיביים אז גם $R \cup S$ רפלקסיבי.

תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $a \in A$. צ"ל $(a,a) \in R \cup S$. אבל, R רפלקסיבי. לכן, $(a,a) \in R$. מכיוון ש $R \subseteq R \cup S$, $(a,a) \in R \cup S$.

ג. אם R,S סימטריים אז גם $R \cap S$ סימטרי.
תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $(x,y) \in R \cap S$. צ"ל $(y,x) \in R \cap S$.
אבל, $(x,y) \in R \cap S \Leftarrow (x,y) \in R$ וגם $(x,y) \in S$.
מכיוון ש R,S רפלקסיביים, $(x,y) \in R \Leftarrow (y,x) \in R$ וכן $(x,y) \in S \Leftarrow (y,x) \in S$
לכן, $(y,x) \in R \cap S$.

ד. אם R,S סימטריים אז גם $R \cup S$ סימטרי.
תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $(x,y) \in R \cup S$. צ"ל $(y,x) \in R \cup S$.
אבל, $(x,y) \in R \cup S \Leftarrow (x,y) \in R$ או $(x,y) \in S$.
אם $(x,y) \in R$ אז מכיוון ש R רפלקסיבי, $(y,x) \in R$ ובפרט $(y,x) \in R \cup S$
אם $(x,y) \in S$ אז מכיוון ש S רפלקסיבי, $(y,x) \in S$ ובפרט $(y,x) \in R \cup S$

ה. אם R,S טרנזיטיביים אז גם $R \cap S$ טרנזיטיבי.
תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $(x,y),(y,z) \in R \cap S$. צ"ל $(x,z) \in R \cap S$.
אבל, $(x,y),(y,z) \in R \cap S \Leftarrow (x,y),(y,z) \in R$ וגם $(x,y),(y,z) \in S$.
מכיוון ש R,S טרנזיטיביים, $(x,y),(y,z) \in R \Leftarrow (x,z) \in R$ וכן
$(x,y),(y,z) \in S \Leftarrow (x,z) \in S$. לכן, $(x,z) \in R \cap S$.

ו. אם R,S טרנזיטיביים אז גם $R \cup S$ טרנזיטיבי.
תשובה: לא נכון.
דוגמה נגדית: תהי $A = \{1,2\}$, $R = \{(1,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$. אזי, R,S טרנזיטיביים ואילו
$R \cup S = \{(1,2),(2,1)\}$ אינו טרנזיטיבי ($(1,2),(2,1) \in R \cup S$ אבל $(1,1) \notin R \cup S$).

6. היחס R מוגדר על קבוצת הטבעיים באופן הבא:
$R = \{(m,n) : m,n \in N, m+n \quad is \quad odd\}$ (כאשר odd – מספר אי זוגי). אזי:
א. R רפלקסיבי.
תשובה: לא נכון. $2 \in N$ אבל $(2,2) \notin R$.

ב. R סימטרי.
תשובה: נכון.
הוכחה: יהי $(m,n) \in R$ אזי $m+n$ אי זוגי. לכן $n+m$ אי זוגי ו $(n,m) \in R$

ג. R טרנזיטיבי.
תשובה: לא נכון. $(2,3),(3,2) \in R$ אבל $(2,2) \notin R$.

ד. R יחס שקילות.
תשובה: לא נכון. מכיוון ש R אינו רפלקסיבי הוא אינו יחס שקילות. (בדומה יכולנו לטעון שמכיוון שהוא אינו טרנזיטיבי הוא אינו יחס שקילות.

בהצלחה! ☺