מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 3

1. (התחלנו בשיעור.) יהיה l_∞ מ"מ של סדרות חסומות :

$$l_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in \mathbb{R},\ \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}$$

כאשר המטריקה מוגדרת כך:

$$d\big((x_n),(y_n)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| \ .$$

תהי$\boldsymbol{F}$ תת-קבוצה של l_∞ : $\boldsymbol{F} = \{ (\boldsymbol{x_i})_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid \{\boldsymbol{i} \in \mathbb{N} | \boldsymbol{x_i} \neq \boldsymbol{0}\} - \text{סופית} \}$

להוכיח ש-F לא סגורה.

(<u>רמז</u>: להסתכל בסדרה (של סדרות!) :

$$(1,0,\dots),\left(1,\frac{1}{2},0,\dots\right),\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},0,\dots\right),\dots$$

2. תהי x_n סדרת קושי במרחב מטרי שלם כך שכל האיברים x_n שונים .
להוכיח/להפריך שבמרחב הזה קיימות נקודות הצטברות של הקבוצה $A = \{x_n\}$.

3. יהיה $\mathbb{R}$ מרחב מטרי עם מטריקה רגילה. לבנות קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ עם שלוש נקודות הצטברות בלבד. (עם הוכחה).

4. יהיה M מרחב מטרי ו- $A \subseteq M$. האם קיימות נקודות הצטברות של A אם:
א' המטריקה ב- M היא d_{0-1}.
ב' $M = \mathbb{R}$ עם המטריקה הרגילה ו- $A = \mathbb{Q}$

5. יהיה M מרחב מטרי ו- $A \subseteq M$.
נסמן ב-A' את הקבוצה של כל נקודות ההצטברות של A.
להוכיח:
א' A' קבוצה סגורה.
ב' $A \cup A'$ קבוצה סגורה.
ג' $A' \subseteq A \iff A$ קבוצה סגורה.

6. יהיה $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי עם מטריקה רגילה ו- $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נסמן ב-A' את הקבוצה של כל נקודות ההצטברות של A.
א' להוכיח: A חסומה $\Leftarrow A'$ תת-מרחב קומפקטי.
ב' הטענה ההפוכה ל-א' לא נכונה. לתת דוגמה מתאימה. (רמז: $\mathbb{Z} \cup (0,1)$)

7. יהיה M מרחב מטרי קומפקטי ו- $A \subseteq M$ תת-קבוצה סגורה.

להוכיח: A תת-מרחב מטרי קומפקטי.

8. תהיינה M, M_1, M_2 קבוצות.

א' יהיו ρ_1, ρ_2 שתי מטריקות שקולות על M.
להוכיח: (M, ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M, ρ_2) קומפקטי.

ב' יהיו (M_2, ρ_2), (M_1, ρ_1) שני מרחבים מטריים ויהיה $M \subseteq M_1 \cap M_2$ כך שהמטריקות ρ_1, ρ_2 משרות על M את אותה המטריקה .
להוכיח: M קומפקטי כתת-מרחב של M_1 אם ורק אם M קומפקטי כתת-מרחב של M_2 .

ג' יהיו $X = (0,1) \cup \{P\}$ ו- $d: X \times X \to \mathbb{R}$ - פונקציה כך ש-
$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$,
$P \notin (0,1)$,
ו-d מוגדרת באופן הבא:
$d(x,y) = |x - y|$ כאשר $x, y \in (0,1)$
$d(P,x) = d(x,P) = \min(x, 1-x)$ כאשר $x \in (0,1)$
$d(P,P) = 0$

להוכיח:

(1) d מטריקה,
(2) (M, d) מרחב מטרי קומפקטי.

בהצלחה!