

שאלה 1

חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

ג. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\sin(2x)}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4}$

ה. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

שאלה 2

הראה כי שימוש בכלל לופיטל לא פותר את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5 \cos(4x)}{x - \sin x}$. מדוע?

שאלה 3

א. הראה כי למשוואה $x \sin x + \cos x = x^2$ פתרון יחיד ב $[0, \infty)$.

ב. הראה כי $x > \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ לכל $x > 0$.

ג. הראה כי $\frac{\sin x}{x}$ יורדת ב $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. הסק כי שם $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

ד. הראה כי לכל $b > a > 0$ מתקיים $\frac{b-a}{1+a^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+b^2}$.

שאלה 4

מצא את הנקודה/נקודות c ממשפט לגרנו' עבור:

א. $f(x) = x^2$ ב $[0, 3]$. ב. $f(x) = \frac{1}{x}$ ב $[1, 2]$. ג. $f(x) = x^3$ ב $[-1, 1]$.

שאלה 5

א. הראה של $f(x) = \frac{1}{x}$ אין נקודת לגרנו' c בכל $[a, b]$ כך ש $a < 0 < b$. מדוע?

ב. נתון $f(0) = 0$ וקיימת $f'_+(0) = 0$. הוכח כי $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.