שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 20.07.16

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u> כל אחת מ-5 שאלות שווה 22 נקודות.

1. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר על ידי גרף של $z = f(x,y)$ כאשר $f(x,y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   א. מצא מטריצת Hessian H_f של f בראשית הצירים.
   ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1,2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x,y) השייך לערך עצמי λ_i. נגדיר מישור $P_i \subseteq \mathbb{R}^3$ ($i = 1,2$) הנפרש על ידי e_3 וגם הווקטור העצמי v_i. נגדיר עקומה $\gamma_i \subseteq \mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i = M \cap P_i$. מצא את העקמומיות של כל אחת מן העקומות γ_i בראשית הצירים.
   ג. חשב את העתקת Weingarten של M בראשית הצירים ואת עקמומיות Gauss של M בראשית הצירים.
   ד. חשב את עקמומיות ממוצעת של משטח M בראשית הצירים .

2. נתון המשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ עם פרמטריזציה $X : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, עם המטריקה $\left(g_{ij}\right) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. חשבו את אורכן של העקומות $\beta_i = X \circ \alpha_i$ במקרים הבאים:
   א. $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
   ב. $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, \pi]$.
   ג. $\alpha_3(t) = (1, t)$ כאשר $t \in (0,1)$.
   ד. חשבו את השטח של פרמטריזציה X בתחום D, כאשר $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x^2 + y^2 > 1, y > 0\}$.

3. מצא נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומה הבאה במישור (x,y) :
   א. עקומה $x - y^2 = 0$.
   ב. עקומה $xy = 1$, $x > 0$.
   ג. עקומה $3x^2 + 4y^2 = 1$.
   ד. עקומה $y = \ln x$.

4. יהי M משטח עם פרמטריזציה $X(u,v)$.

א. הוכיחו שאם הקואורדינאטות איזותרמיות עם פונקציה f, אז מתקיים $\Delta X=-2f^2H\vec{n}$, כאשר Δ מסמלת את אופרטור הלפלסיאן, H את העקמומיות הממוצעת של המשטח ו- $\vec{n}$ את וקטור הנורמל למשטח.

ב. הוכיחו שמשטח הסיבוב של העקומה $x=\cosh z$ הוא משטח מינימלי.

ג. הוכיחו שהמשטח הבא הוא משטח מינימלי: $X(u,v)=\left(u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)\right)$.

5. הביטויים הבאים משתמשים בסימון חיבור של Einstein. לבטא באמצעות מקדמים Γ_{ij}^{ℓ}, L_{ij}, וכו' ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:

א. $\left\langle x_j, x_{pq}\right\rangle g^{jp}$.

ב. $\left\langle x_{pqr}, n\right\rangle$.

ג. $\delta^i{}_j\, g_{ik}\, \delta^k{}_\ell$.

ד. לבטא באמצעות Γ_{ij}^{ℓ} ו- L_{ij} *בלבד*: $\delta^k{}_m\left\langle x_{ab}, n_k\right\rangle$.

בהצלחה!