מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ד מועד ב'

12.9.2024

מרצים: גיא בלשר, דניס גולקו, עוזי חרוש, ארז שיינר.
מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, ירדן שני.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 109. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (10 נק' לכל סעיף) יהי $a \in \mathbb{R}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -a & a+2 & 2a \\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}.$$

א. מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם המטריצה A אינה הפיכה.

ב. עבור $a=-1$, מצאו בסיס ומימד ל-$C(A)$ ול-$N(A)$.

ג. עבור $a=-1$, מצאו בסיס ומימד ל-$C(A) \cap N(A)$.

פתרון.

א.

$$\begin{pmatrix} -a & a+2 & 2a \\ 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2a+1 & -a-2 & -a^2-3a+6 \\ -a & a+2 & 2a \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & a+2 & -a^2+a+6 \\ -a & a+2 & 2a \\ a & -a-2 & a^2-2a-4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - aR_1]{R_2 \leftarrow R_2 + aR_1} \begin{pmatrix} 1 & a+2 & -a^2+a+6 \\ 0 & a^2+3a+2 & -a^3+a^2+8a \\ 0 & -a^2-3a-2 & a^3-8a-4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & a+2 & -a^2+a+6 \\ 0 & a^2+3a+2 & -a^3+a^2+8a \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$$

נזכור כי $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$ ו-$a^2-4=(a+2)(a-2)$. לכן כל עוד $a \neq -1, \pm 2$, המטריצה הפיכה (המטריצה ריבועית ובצורה מדורגת אין שורת אפסים), ואחרת המטריצה אינה הפיכה.

ב. ראשית נציב $a=-1$ ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

כדי למצוא בסיס ל-$C(A)$ ול-$N(A)$, צריך לדרג את המטריצה. למזלנו כבר התחלנו לדרג בסעיף הקודם; נמשיך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3+3R_2]{R_1 \leftarrow R_1-4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

- בסיס למרחב העמודות מתקבל משתי העמודות שיש בהן איבר מוביל, כלומר הראשונה והאחרונה: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל-$C(A)$ והמימד הוא 2.
- בסיס למרחב האפס מתקבל לפי פתרון כללי של המערכת ההומוגנית, שהוא $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל-$N(A)$ והמימד הוא 1.

ג. אפשר למצוא את החיתוך על סמך מערכות משוואות. אבל במקרה שלנו, כיוון ש-$\dim N(A) = 1$ ו-$C(A) \cap N(A) \leq N(A)$, נובע $\dim(C(A) \cap N(A)) \leq 1$. לכן יש שתי אפשרויות: המימד הוא 0 ואז $C(A) \cap N(A) = \{0\}$, או שהמימד

הוא 1 ואז $C(A)\cap N(A)=N(A)$ (מהכלה ושוויון מימדים), כלומר $N(A)\subseteq C(A)$. שוב כיוון ש-$\dim N(A)=1$, מספיק לבדוק האם איבר הבסיס שלו שייך ל-$C(A)$. לצורך כך אפשר לשים במטריצה ולבדוק אם יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה, לכן אין פתרון למערכת. לפי ההסבר למעלה, נקבל $C(A)\cap N(A)=\{0\}$. לכן $\varnothing$ בסיס של $C(A)\cap N(A)$, והמימד הוא 0.

שאלה 2. (7 נק' לכל סעיף) יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$, ויהי $B=\left\{1+3x, 3-2x^2, -1+x+x^2\right\}$.

א. הוכיחו כי הקבוצה B היא בסיס של V.

ב. נחשוב על B כבסיס סדור של V, ונניח שנתונה העתקה לינארית $T\colon V\to V$ שעבורה

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס ומימד עבור $\ker T$ ועבור $\operatorname{Im} T$.

ג. עבור ההעתקה הלינארית T מהסעיף הקודם, מצאו בסיס סדור C של $\mathbb{R}_2[x]$ שעבורו

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

יש להוכיח שהקבוצה C שמצאתם היא אכן בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון.

א. אנחנו יודעים ש-$\dim V=3=|B|$, לכן לפי משפט השלישי חינם מספיק לבדוק ש-B בת"ל. לצורך כך, נשים את איברי B בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{2}{9}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

בכל העמודות יש איבר מוביל ולכן B בת"ל. כמו שהסברנו, זה מוכיח ש-B בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

ב. כדי למצוא בסיס לגרעין ולתמונה, צריך למצוא בסיס למרחב האפס ולמרחב העמודות של המטריצה המייצגת, ולכפול חזרה באיברי הבסיס B. נדרג:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-10R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -16 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{16}R_3]{R_2\leftarrow \frac{1}{8}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_2]{R_1\leftarrow R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

- עבור הגרעין: המשתנה החופשי הוא $z=t$, לכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ ובסיס למרחב האפס הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. נכפול חזרה באיברי B ונקבל שבסיס ל-$\ker T$ הוא

$$\left\{-(1+3x)-(3-2x^2)+(-1+x+x^2)\right\}=\left\{-5+x+3x^2\right\}$$

והמימד הוא $\dim\ker T=1$.

- עבור התמונה: בסיס למרחב העמודות מתקבל משתי העמודות הראשונות המקוריות, כי אחרי הדירוג יש בהן איבר מוביל. נמיר חזרה לאיברי B ונקבל שבסיס ל-$\operatorname{Im} T$ מורכב משני הווקטורים

$$\begin{aligned} 0(1+3x)+(3-2x^2)+10(-1+x+x^2) &= -7+10x+8x^2 \\ 8(1+3x)+(3-2x^2)-6(-1+x+x^2) &= 17+18x-8x^2 \end{aligned}$$

והמימד הוא 2.

ג. ננסה להבין מיהו הבסיס הדרוש. נסמן $C=\{v_1,v_2,v_3\}$. לפי הנוסחה לחישוב מטריצה מייצגת, צריך

$$\begin{aligned} T(1+3x) &= v_1 \\ T(3-2x^2) &= v_2 \\ T(-1+x+x^2) &= v_1+v_2 \end{aligned}$$

את כל אלו אנחנו יודעים למצוא, שהרי $[T(1+3x)]_B$ הוא העמודה הראשונה ב-$[T]_B^B$ וכן הלאה. לכן

$$\begin{aligned} v_1 &= 0(1+3x)+(3-2x^2)+10(-1+x+x^2) = -7+10x+8x^2 \\ v_2 &= 8(1+3x)+(3-2x^2)-6(-1+x+x^2) = 17+18x-8x^2 \end{aligned}$$

הדרישה השלישית מתקיימת אוטומטית. כל מה שנותר הוא להשלים את שני הווקטורים האלו לבסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. אפשר למשל לבחור $C=\left\{-7+10x+8x^2, 17+18x-8x^2, 1\right\}$. זה אכן בסיס: לפי השלישי חינם מספיק לבדוק שהוא בת"ל, ואכן אם נשים בעמודות מטריצה נקבל

$$\begin{pmatrix} -7 & 17 & 1 \\ 10 & 18 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 10 & 18 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-8R_1]{R_2\leftarrow R_2-10R_1} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & -72 & -10 \\ 0 & -80 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{80}R_3]{R_2\leftarrow -\frac{1}{72}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{36} \\ 0 & 1 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{180} \end{pmatrix}$$

בכל עמודה יש איבר מוביל, לכן הקבוצה C בת"ל, ומכאן נסיק שהיא גם בסיס – לפי השלישי חינם.

שאלה 3. (7 נק' לכל סעיף) יהיו $v_1,v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}^3$. נתון כי למשוואה $x_1v_1+x_2v_2=v_4$ קיים פתרון יחיד, וכי $v_3\notin\operatorname{Span}\{v_1,v_2,v_4\}$.

א. הוכיחו כי הווקטורים v_1,v_2 בת"ל.

ב. הוכיחו כי הווקטורים v_1,v_2,v_3 מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

ג. מצאו את כל ערכי הפרמטר הממשי a שעבורו הווקטורים

$$v_1=\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix} 2 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מקיימים את נתוני השאלה.

פתרון.

א. יהי צירוף לינארי מתאפס $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=0$. נשים לב כי אם

$$x_1v_1+x_2v_2=v_4$$

אז גם

$$(x_1+\alpha_1)v_1+(x_2+\alpha_2)v_2=v_4.$$

כיוון שלמערכת הזו יש פתרון יחיד, בהכרח $\alpha_1=\alpha_2=0$.

ב. מספיק להוכיח ש-v_1, v_2, v_3 בת"ל. הוכחנו בסעיף הקודם ש-v_1, v_2 בת"ל; לפי משפט מההרצאה, מספיק אם כן להוכיח $v_3 \notin \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$. אבל זה נובע מנתון, ולכן נובע ש-v_1, v_2, v_3 בת"ל. מהשלישי חינם, נובע שהם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.
בפירוט: יהי צירוף לינארי מתאפס $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. נניח בשלילה ש-$\gamma \neq 0$. אז מהעברת אגפים נקבל $v_3 = -\alpha\gamma^{-1}v_1 - \beta\gamma^{-1}v_2 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$, בסתירה לנתון. לכן בהכרח $\gamma = 0$. אבל אז $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, ומהסעיף הקודם נקבל $\alpha = \beta = 0$. לכן v_1, v_2, v_3 בת"ל.

ג. נשים את כל הווקטורים בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ a & a & a & a^2 \\ 0 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & a-1 & a^2-2 \\ 0 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & a-1 & a^2-2 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

כדי שהווקטורים v_1, v_2, v_3 יהיו בת"ל, צריך שבשלושת העמודות הראשונות יהיו איברים מובילים; לכן $a \neq 0, 1$. כמו כן, כדי ש-$v_4 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$, צריך שכאשר מורידים את העמודה השלישית לא תהיה שורת סתירה, כלומר צריך $a = \pm 1$.
נשים לב שהתנאי $v_3 \notin \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4\}$ נובע אוטומטית מהאחרים: $v_4 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$, לכן $\operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_4\} = \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$, וכן $v_3 \notin \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$ כי v_1, v_2, v_3 בת"ל.
בסך הכל, הווקטורים מקיימים את תנאי השאלה אם ורק אם $a = -1$.

שאלה 4. (8 נק' לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U_1, U_2, W \leq V$ תת־מרחבים של V.

א. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $U_1 \cap W = U_2 \cap W = \{0\}$, אז $(U_1 + U_2) \cap W = \{0\}$.

ב. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם כל בסיס של V מכיל בסיס של W, אז $W = \{0\}$ או $W = V$.

פתרון.

א. <u>הפרכה.</u> נבחר $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, ונגדיר את תת־המרחבים

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

אזי $U_1 \cap W = U_2 \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; אבל $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$, לכן $(U_1 + U_2) \cap W = W \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ב. <u>הוכחה.</u> נניח בשלילה כי $W \neq \{0\}$ וגם $W \neq V$. יהי $w_1, \ldots, w_k$ בסיס של W (כאשר $k \geq 1$ כי $W \neq \{0\}$). נשלים אותו לבסיס $w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ של V (כאשר $\dim W = k < n = \dim V$ כי $W \neq V$).
נוכיח כי הקבוצה $B = \{w_1 + v_{k+1}, \ldots, w_k + v_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ היא בסיס של V, ואז נסביר מדוע זה מוביל לסתירה.

- B בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1(w_1 + v_{k+1}) + \cdots + \alpha_k(w_k + v_{k+1}) + \alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

לכן

$$\alpha_1 w_k + \cdots + \alpha_k w_k + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1})v_{k+1} + \alpha_{k+2}v_{k+2} + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

כיוון ש-$w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ בסיס, הווקטורים בת"ל, לכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_n = 0$ וגם $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k+1} = 0$, לכן גם $\alpha_{k+1} = 0$. בסך הכל B בת"ל.
- $|B| = n = \dim V$.

לפי משפט השלישי חינם, נסיק ש-B בסיס של V.
מדוע זו סתירה? אין אף וקטור של B ששייך ל-W: הווקטורים $v_{k+1}, \ldots, v_n$ נבחרו מראש להשלים בסיס של W לבסיס של V, לכן הם לא שייכים ל-W; אם נניח בשלילה $w_i + v_{k+1} \in W$, מסגירות נקבל $v_{k+1} = (w_i + v_{k+1}) - w_i \in W$, בסתירה. לכן אין ב-$B$ אף איבר של W, ולא יכול להיות בסיס $C \subseteq B$ של W. הסתירה מוכיחה את השאלה.

שאלה 5. (7 נק' לכל סעיף) יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהיינה $T\colon U \to V$ ו-$S\colon V \to W$ העתקות לינאריות.
נגדיר העתקה לינארית $\tilde{S}\colon \operatorname{Im} T \to W$ לפי $\tilde{S}v = Sv$ (כלומר $\tilde{S}$ היא הצמצום של S לתמונה של T).
אין צורך להוכיח כי $\tilde{S}$ היא העתקה לינארית.

א. הוכיחו כי $\ker \tilde{S} = \ker S \cap \operatorname{Im} T$ וכי $\operatorname{Im} \tilde{S} = \operatorname{Im}(ST)$.

ב. הוכיחו כי $\dim\ker(ST) \le \dim\ker T + \dim\ker S$.

ג. הוכיחו כי $\dim\ker(ST) = \dim\ker T + \dim\ker S$ אם ורק אם $\ker S \subseteq \operatorname{Im} T$.

פתרון.

א. נוכיח על ידי הכלה דו־כיוונית את שני החלקים.

- הגרעין: $\boxed{\subseteq}$ יהי $v \in \ker \tilde{S}$. לכן $v \in \operatorname{Im} T$ (כי זה התחום של $\tilde{S}$) ו-$\tilde{S}v = 0$. מהגדרת $\tilde{S}$ נובע $Sv = 0$, לכן $v \in \ker S$. בסך הכל $v \in \ker S \cap \operatorname{Im} T$.
$\boxed{\supseteq}$ יהי $v \in \ker S \cap \operatorname{Im} T$. כיוון ש-$v \in \operatorname{Im} T$, אז הוא בתחום של $\tilde{S}$. מהגדרת ההעתקה, $\tilde{S}v = Sv = 0$ (כי $v \in \ker S$), ולכן $v \in \ker \tilde{S}$.
- התמונה: $\boxed{\subseteq}$ יהי $w \in \operatorname{Im} \tilde{S}$. אזי קיים $v \in \operatorname{Im} T$ כך ש-$w = \tilde{S}v = Sv$. כיוון ש-$v \in \operatorname{Im} T$, קיים $u \in U$ כך ש-$v = Tu$. לכן $w = Sv = STu$, כלומר $w \in \operatorname{Im}(ST)$.
$\boxed{\supseteq}$ יהי $w \in \operatorname{Im}(ST)$. לכן קיים $u \in U$ כך ש-$w = STu$. נסמן $v = Tu \in \operatorname{Im} T$, ואז $w = Sv = \tilde{S}v$, כלומר $w \in \operatorname{Im} \tilde{S}$.

ב. לפי משפט הדרגה עבור $\tilde{S}$, נקבל

$$\dim\ker \tilde{S} + \dim\operatorname{Im} \tilde{S} = \dim\operatorname{Im} T\,.$$

נציב מהסעיף הקודם ונקבל

$$\dim(\ker S \cap \operatorname{Im} T) + \dim\operatorname{Im}(ST) = \dim\operatorname{Im} T\,.$$

לפי משפטי הדרגה עבור T ו-ST, נקבל

$$\dim(\ker S \cap \operatorname{Im} T) + \dim U - \dim\ker(ST) = \dim U - \dim\ker T\,.$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\dim\ker(ST) = \dim\ker T + \dim(\ker S \cap \operatorname{Im} T) \le \dim\ker T + \dim\ker S\,,$$

כשהמעבר האחרון נובע מכך ש-$\ker S \cap \operatorname{Im} T$ הוא תת־מרחב של $\ker S$. זה מוכיח את הדרוש.

ג. לפי ההוכחה מהסעיף הקודם, יש שוויון אם ורק אם $\dim(\ker S \cap \operatorname{Im} T) = \dim\ker S$ (כי זה המקום היחיד שבו היה אי־שוויון). מצד שני, $\ker S \cap \operatorname{Im} T \le \ker S$, לכן $\dim(\ker S \cap \operatorname{Im} T) = \dim\ker S$ אם ורק אם $\ker S \cap \operatorname{Im} T = \ker S$, וזה שקול לכך ש-$\ker S \subseteq \operatorname{Im} T$.