חזרה: **הגדרה:** תהי $R \subset \mathbb{R}$ תת קבוצה כלשהי. אז המידה החיצונית של E היא

$$m^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

כאשר I_n קטעים פתוחים.

תכונות רצויות: 1. לכל $E \subset \mathbb{R}$, $0 \le m^*(E) \le \infty$ מוגדרת היטב!

2. לכל קטע $E \subset \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(E) = |E|$.

3. $m^*(x_0 + E) = m^*(E)$ שמורה תחת הזזה.

4. m^* תת־חיבורית σ: ז.א. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ אז $m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$.

אבל m^* אינה σ־חיבורית. ז.א. קיימת סדרת קבוצות זרות בזוגות $(E_n)^{\infty}$ כך ש$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subsetneqq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$, ולמעשה יש מספר סופי של קבוצות זרות בזוזות $E_1, \dots E_n$ כך ש$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \subsetneqq \sum_{k=1}^{n} m^*(E_k)$.

רעיון

נצמצם את m^* לאוסף די גדול של קבוצות, "הקבוצות המדידות של לבג", כך שעליהן m^* σ־חיבורית.

הגדרה

$E \subset \mathbb{R}$ מדידה(לבג) אם **לכל** קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

משפט 5

א. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ $E^{\complement}$ מדידה.

ב. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ לכל $A \subset \mathbb{R}$ $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$.

ג. אם $m^*(E) = 0$ אז E מדידה.

ד. אם $E \subset \mathbb{R}$ מדידה אז לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 + E$ מדידה.

משפט 6

כל קטע מהסוג (a, ∞) $(a \in \mathbb{R})$ הוא קבוצה מדידה.

משפט 7

נניח ש$E_1 \subset \mathbb{R}$ ו$E_2 \subset \mathbb{R}$ מדידות. אזי $E_1 \cup E_2$ מדידה.

הוכחה

צריך להוכיח שלכל $A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\complement}\right)$$

אבל לפי דה־מורגן

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) = (A \cap E_1) \cup \left(A \cap E_1^{\complement} \cap E_2\right)$$

כמו כן

$$A \cap (E_1 \cup E_2)^{\complement} = A \cap E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}$$

לפי זה

$$m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\complement}\right) \leq$$

$$\leq m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap E_1^{\complement} \cap E_2\right) + m^*\left(A \cap E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}\right) = \cdots$$

ובגלל שE_2 מדידה:

$$\cdots = m^*(A \cap E_1) + m^*\left(A \cap E_1^{\complement}\right) = m^*(A)$$

כי E_1 מדידה.
בזה הוכחנו ש$E_1 \cup E_2$ מדידה.

מסקנה

יהיו $E_1, E_2 \ldots E_n$ קבוצות מדידות. אזי:

א. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ מדידה.

ב. $\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$ מדידה.

הוכחה

א. מיידי ע"י אינדוקציה.

ב. כיוון שכל E_k מדידה, משפט 5 אומר שכל $E_k^{\complement}$ מדידה. לפי דה־מורגן

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k^{\complement}\right)^{\complement}$$

לפי המסקנה הראשונה זאת קבוצה מדידה.

■

סיכום ביניים

הוכחנו שהקבוצות המדידות מהוות אלגברה(בוליאנית) של קבוצות. ז.א. הן אוסף של תת קבוצות של $\mathbb{R}$ שסגור תחת איחוד סופי ומשלים, וממילא סגור תחת חיתוך סופי.

משפט 8

יהיו $E_1, E_2, \ldots E_n$ קבוצות מדידות זרות בזוגות, ונגדיר $E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$. אזי לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*\left(A \cap E\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*\left(A \cap E_k\right)$$

הוכחה(באינדוקציה על n)

עבור $n = 1$ הטענה טריוויאלית.

נניח שהמשפט כבר הוכח לכל אוסף של $n - 1$ קבוצות ונוכיח אותו לn הקבוצות $E_1, \ldots E_n$ כמו בציטוט המשפט.

ובכן, E_n מדידה, ולכן

$$m^*\left(A \cap E\right) = m^*\left(\left(A \cap E\right) \cap E_n\right) + m^*\left(\left(A \cap E\right) \cap E_n^{\complement}\right)$$

כיוון ש$E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ הרי $E \cap E_n = E_n$ ו$E \cap E_n^{\complement} = \biguplus_{k=1}^{n-1} E_k$. לכן השוויון הנ"ל אומר

$$m^*\left(A \cap E\right) = m^*\left(A \cap E_n\right) + m^*\left(A \cap \biguplus_{k=1}^{n-1} E_k\right) = \cdots$$

וע"פ אינדוקציה

$$\cdots = m^*\left(A \cap E_n\right) + \sum_{k=1}^{n-1} m^*\left(A \cap E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*\left(A \cap E_k\right)$$

■

מסקנה

בתנאים של משפט 8 $m^*\left(E\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}m^*\left(E_k\right)$.

הוכחה

ניקח $A=\mathbb{R}$ או $A=E$!

משפט 9

תהי X קבוצה וS אלגברה של תת קבוצות של X. נניח ש$\left(E_n\right)_{n=1}^{\infty}$ שייכות לS. אזי קיימת סדרה $\left(F_n\right)_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות בS כך ש:

א. לכל n $F_n\subset E_n$.

ב. הF_n זרות בזוגות.

ג. לכל n מתקיים $\bigcup\limits_{k=1}^{n}F_k=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$.

ד. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$.

הוכחה

F_n תהיה הקבוצה המכילה כל מה שהתחדש בE_n. ז.א.

$$F_n=E_n\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\right)^{\complement}=E_n\cap E_1^{\complement}\cap E_2^{\complement}\cap\cdots\cap E_{n-1}^{\complement}$$

$$F_1=E_1$$

הוכחת התכונות:

א. $F_n=E_n\cap\left(\cdots\right)$, לכן $F_n\subset E_n$.

ב. אם $m<n$ הרי $F_n\subset E_m^{\complement}$ כי F_n=חיתוך $E_m^{\complement}$ עם עוד קבוצות, ואילו $F_m\subset E_m$ ולכן $F_n\cap E_m\neq\emptyset$.

ג. נוכיח באינדוקציה. עבור $n=1$ הטענה היא $E_1=F_1$, אבל זה נכון לפי הגדרה. כעת נניח שכבר הוכחנו $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}F_k=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}E_k$. כעת:

$$\bigcup_{k=1}^{n}F_k=\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}F_k\right)\cup F_n=\bigcup_{k=1}^{n-1}F_k\cup\Big(E_n\cap E_1^{\complement}\cap E_2^{\complement}\cap\cdots\cap E_{n-1}^{\complement}\Big)=\cdots$$

ולפי הנחת האינדוקציה

$$\cdots = \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \cup \left(E_n \cap E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement} \cap \cdots \cap E_{n-1}^{\complement}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

ד. רוצים להוכיח $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. כיוון שלכל k $F_k \subset E_k$ אגף שמאל מוכל באגף ימין.

לצד השני: אם $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש$x \in E_n$. ממילא

$$x \in E_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}$$

משפט 10

יהיו $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות לבג. נגדיר $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. אזי E מדידה לבג.

הוכחה

ללא הגבלת הכלליות הE_n זרות בזוגות - כי אם לא נוכל להחליף אותן ע"י קבוצות זרות מדידות F_n(כמו במשפט 9) ו$E = \bigcup E_n = \bigcup F_n$.

כעת עבור כל n נגדיר $G_n = \biguplus\limits_{k=1}^{n} E_k$. לכל n מתקיים $G_n \subset E = \biguplus\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ולכן $E^{\complement} \subset G_n^{\complement}$.

כעת ניקח קבוצה כלשהי $A \subset \mathbb{R}$ ונעיר שמכיוון שכל G_n מדידה (בתור איחוד **סופי** של קבוצות מדידות) אז לכל n

$$m^*(A) = m^*(A \cap G_n) + m^*\left(A \cap G_n^{\complement}\right) \geq m^*(A \cap G_n) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

ע"פ משפט 8 זה שווה

$$\sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

נשאיף $n \to \infty$ להסיק

$$m^*(A) \supseteq \sum_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

וכיוון ש$E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $A \cap E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A \cap E_k$ וממילא $m^*(A \cap E) \subseteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k)$.
נחזור ל1 להסיק

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^{\complement}\right)$$

והוכחנו שE מדידה.

$\blacksquare$

מסקנה 1

במצב של משפט 10 $m^{*}\left(E_{k}\right)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ = $m^{*}\left(E\right)=m^{*}\left(\biguplus\limits_{k=1}^{\infty}E_{k}\right)$.

הוכחה

בנוסחה 1 נציב $A=E$ לומר

$$m^{*}\left(E\right)\supseteq\sum_{k=1}^{\infty}m^{*}\left(E\cap E_{k}\right)+m^{*}\left(\overbrace{E\cap E^{\complement}}^{=\emptyset}\right)$$

ז.א.

$$m^{*}\left(E\right)\geq\sum_{k=1}^{\infty}m^{*}\left(E_{k}\right)$$

ותמיד

$$m^{*}\left(E\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^{*}\left(E_{k}\right)$$

ולכן יש שוויון!

מסקנה 2

יהיו $\left(E_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ קבוצות מדידות לבג(ולאו דווקא זרות בזוגות!). אז $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_{n}$ מדידה.

הוכחה

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{n}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_{n}^{\complement}\right)^{\complement}$$

מסקנה 3

אם $S\subset\mathbb{R}$ תת קבוצה בת מנייה, אז S מדידה לבג ו$m^{*}\left(S\right)=0$.

הוכחה

אפשר לכתוב $S = \biguplus_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ כאשר הx_n נקודות ב$\mathbb{R}$.

לפי משפט 1 $m^*(\{x_n\}) = 0$. לפי משפט 5 כל $\{x_n\}$ מדידה(כי מידתה החיצונית 0).

לפי משפט 10 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n$ מדידה. ולפי מסקנה 1

$$m^*(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* \{x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

מסקנה 4

$\mathbb{R}$(או כל קטע ב$\mathbb{R}$) לא בת מנייה.

מסקנה 5

הקבוצה "E" שבנינו בעזרת אסקיומת הבחירה היא **לא** מדידה לבג.

הוכחה

לפי הבנייה קיבלנו

$$(0,1) \subset \biguplus_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} E + r \subset (-1,2)$$

בדרך שלילה נניח שE מדידה. ע"פ משפט 5 כל $E + r$ מדידה.

לפי משפט 1

$$m^*((0,1)) \leq m^* \left(\biguplus_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} E + r \right) \subseteq m^*(-1,2)$$

ע"פ משפט 10 מתקיים

$$1 \leq \sum_{r + \mathbb{Q} \cap (-1,1)} m^*(E + r) \leq 3$$

ז.א.

$$1 \leq \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} m^*(E) = 3$$

וזה בלתי אפשרי.

הסתירה מוכיחה שE לא מדידה.

הגדרה

הצמצום של m^* לקבוצות המדידות הוא מידת לבג על $\mathbb{R}$(מסומן לפעמים בm).

הגדרה

תהי X קבוצה כלשהי.
אוסף $S\subset P\left(X\right)$ נקרא σ אלגברה אם:

א. $E\in S \Longleftarrow E^{\complement}\in S$.

ב. $\left(E_n\right)_{n=1}^{\infty}$ שייכים לS $\Longleftarrow$ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in S$, וממילא גם $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in S$.

ג. $\emptyset\in S$(וגם $X\in S$).

קבוצות מדידות לבג כσ אלגברה

מהמשפטים הקודמים נובע שהקבוצות המדידות לבג מהוות σ אלגברה של תת קבוצות של $\mathbb{R}$.

נאפיין (חלק) מהקבוצות ב"אלגברת לבג" $L\subset P\left(\mathbb{R}\right)$ של קבוצות מדידות.

ובכן: במשפט 6 הוכחנו שכל קטע מהסוג $\left(a,\infty\right)$ מדיד. כמו כן כל קטע מהסוג $\left(-\infty,b\right)$ מדיד, ולכן החיתוך שלהם $\left(a,b\right)$ מדיד.

מכאן שכל איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים מדיד. ז.א. כל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ מדידה. ע"י משלים כל קבוצה סגורה מדידה.

משפט 11

תהי X קבוצה כלשהי, ויהי T אוסף של תת קבוצות של X. אזי קיימת σ אלגברה מינימלית $S\subset P\left(X\right)$ כך ש$T\subset S$.

הוכחה(בקיצור)

$P\left(x\right)$ σ אלגברה שמכילה את T. קל להוכיח שחיתוך σ אלגברות הוא σ אלגברה, ולכן קיימת $S=\bigcap\limits_{\substack{T\subset A_\alpha\\ \sigma\text{ algebra}}}A_\alpha$.

הגדרה

יהי X מרחב טופולוגי.

אלגברת בורל $B\left(X\right)\subset P\left(X\right)$ היא הσ אלגברה המינימלית של תת קבוצות של X שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות בX.

מסקנה

מכל הנ"ל נסיק ש$B\left(\mathbb{R}\right)\subset L\left(\mathbb{R}\right)$.

הוכחה

הרי אלגברת לבג $L\left(\mathbb{R}\right)$ היא σ אלגברה המכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב$\mathbb{R}$. לכן בהכרח היא מכילה את הσ אלגברה המינימלית שיש בה כל הקבוצות הפתוחות $B\left(\mathbb{R}\right)$.

דוגמאות של קבוצות בורל

א. קבוצות G_{δ} שהן חיתוכים בני מנייה של קבוצות פתוחות.

ב. קבוצות F_{σ}שהן איחודים בני מנייה של קבוצות סגורות.

ג. קבוצות $G_{\delta\sigma}$ שהן איחודים בני מנייה של קבוצות G_{δ}.

ד. קבוצות $F_{\sigma\delta}$ שהן חיתוכים בני מנייה של קבוצות F_{σ}.

ה. כמו כן יש קבוצות $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma\ldots}$ וכו'.

עובדה

כל פעם שמוסיפים σ או δ מוסיפים קבוצות בורל חדשות, אבל כולן ביחד אינן מרכיבים את אלגברת בורל כולה.

משפט 12

תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. אזי קיימת קבוצה מדידה F כך ש$m\left(F\right)=0$ וקבוצה S מטיפוס G_{δ} כך ש$S=E\uplus F$ או $E=S\backslash F$.

הוכחה

כאן נוכיח את המשפט במקרה $m\left(E\right)<\infty$.

לפי ההגדרה של m(m^{*}=) עבור $n\in\mathbb{N}$ קיים כיסוי פתוח $\left\{ I_{k}\right\} _{k=1}^{\infty}$ כך ש I_{k} $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$ ו

$$m\left(E\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|I_{k}\right|\leq m\left(E\right)+{}^{1}\!/\!{}_{n}$$

נגדיר קבוצה פתוחה $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{k}=S_{n}$ [1] ולכן $E\subset S_{n}$ ומתקיים

$$m\left(E\right)\leq m\left(S_{n}\right)\leq m\left(E\right)+{}^{1}\!/\!{}_{n}$$

[1]נשים לב שלכל n יש I_{k}ים שונים.

נגדיר $S \ni G_\delta$ ע"י $S_n \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} = S$. כיוון שלכל n $E \subset S_n$ גם מתקיים $E \subset S$ ולכן n $S \subset S_n$. ממילא לכל n

$$m(E) \leq m(S) \leq m(S_n) \leq m(E) + {}^1\!/\!{}_n$$

נשאיף $n \leftarrow \infty$ להסיק ש$m(S) = m(E)$. לבסוף נגדיר $F = S \backslash E$ ולכן $S = E \uplus F$. כיוון שS, E, F מדידות נקבל $m(S) = m(E) + m(F)$. כיוון ש$m(E) < \infty$ נוכל להסיק ש$m(F) = m(S) - m(E) = 0$ והגענו לפירוק הדרוש $S = E \uplus F$, כאשר $S \ni G_\delta$ ו$m(F) = 0$.

■

הערה: אפשר להכליל את התוצאה למקרה $m(E) = \infty$.

מידות כלליות

הגדרה

תהי X קבוצה כלשהי ותהי S σ אלגברה של תת קבוצות של X. הזוג (X, S) נקרא "מרחב מדיד".

הגדרה

יהי (X, S) מרחב מדיד. מידה(חיובית) על (X, S) היא פונקציה $\mu : S \to [0, \infty]$ כך ש:

א. $\mu(\emptyset) = 0$.

ב. אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ בS זרות בזוגות אז $\mu\left(\biguplus\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

לפעמים קוראים לS "הקבוצות המדידות לפי μ או $\mathrm{d}\mu$"

דוגמאות

1. מידת לבג m על המרחב $(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}))$.
2. מידת לבג m על המרחב $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$.
3. מידת לבג m_n על $(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n))$ כאשר $L(\mathbb{R}^n)$ היא אלגברת לבג על $\mathbb{R}^n$.

כדי לבנות את m_n נתחיל עם מידה חיצונית m_n^*. עבור כל קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר

$$m_n^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_m} \sum_{m=1}^{\infty} V(I_m)$$

כאשר I_m תיבות פתוחות ב$\mathbb{R}^n$ ו$V\left(I_m\right)$=הנפח של I_m.

$L\left(\mathbb{R}^n\right)$ היא אלגברת כל הקבוצות המדידות $E\subset\mathbb{R}^n$, ז.א. כל E כך שלכל $A\subset\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$m_n^*\left(A\right)=m_n^*\left(A\cap E\right)+m_n^*\left(A\cap E^{\complement}\right)$$