

אלגברה לינארית 2 (88113) בחינת סיום (מועד א')

מרצה: פרופ' רון עדין
מתרגלת: אמונה ליפסקר
משך הבחינה: שלוש שעות.
חומר עזר מותר: מחשבון.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
נא לרשום בעמוד הראשון אילו שאלות נבחרו. בהעדר רישום, תיבדקנה ארבע
השאלות הראשונות במחברת.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיטה". נא הסבירו ונמקו בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

.1

א. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. חשבו את המטריצה הנלווית $adj(A)$
ומצאו בעזרתה את A^{-1} . בדקו את תשובתכם.
ב. תנו דוגמה של מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך ש- $A \neq 0$ אבל $adj(A) = 0$.
ג. הוכיחו: לכל $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $adj(AB) = adj(B) \cdot adj(A)$.

2. תהי $A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, כאשר $a, b, c \in \mathbb{R}$ פרמטרים.

א. מצאו את הפולינום המינימלי של A ; חלקו למקרים לפי הצורך.
ב. מצאו את כל ערכי הפרמטרים a, b, c שעבורם A לכסינה.
ג. מצאו את כל ערכי הפרמטרים a, b, c שעבורם A לכסינה אורתוגונלית.

.3

א. מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.
ב. הוכיחו: אם לזוג מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.
ג. תנו דוגמה של זוג מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ שיש להן אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אך הן אינן דומות.

.4

א. נגדיר, עבור $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$
 $\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 3v_2 w_2$
הוכיחו שזו מכפלה פנימית על \mathbb{R}^2 .
ב. מצאו בסיס אורתונורמלי עבור \mathbb{R}^2 ביחס למכפלה פנימית זו.
ג. הוכיחו: אם $a, b, c \in \mathbb{R}$ מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, אז $a + 2b + 2c \leq 9$.
מתי מתקיים שוויון?

$$5. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

- א. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של A .
- ב. האם A לכסינה? נורמלית? אוניטרית? צמודה לעצמה? אנטי-צמודה לעצמה?
- ג. הוכיחו: מטריצה $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ היא צמודה לעצמה ואוניטרית (בו זמנית) אם ורק אם היא לכסינה אוניטרית ומקיימת $B^2 = I$.