# פתרון תרגיל בית 6 מבוא לתורת החבורות
# 88-211 סמסטר א' תשע"ז

**הוראות** בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ג' טבת ה'תשע"ז, 1.1.2017.

## שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

**שאלה 1.** תהי $H \subseteq G$ תת־קבוצה של חבורה $G$. הוכיחו ש-$H \leq G$ אם ורק אם $H = \langle H \rangle$.

פתרון. לפי הגדרה, בכל מקרה מתקיים $H \subseteq \langle H \rangle$. אם $H$ תת־חבורה, אז היא תת־החבורה הקטנה ביותר שמכילה את $H$. כלומר $\langle H \rangle \subseteq H$, ולכן $H = \langle H \rangle$.

לפי הגדרה, $\langle H \rangle$ היא תת־חבורה של $G$. לכן אם $H = \langle H \rangle$, אז $H$ היא תת־חבורה.

**שאלה 2.** יהיו $f : G \to H$ ו-$g : H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f : G \to K$ היא הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$, ושלכל $h_1, h_2 \in H$ מתקיים $g(h_1 h_2) = f(h_1) f(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i = f(g_i)$. לכן לכל $g_1, g_2 \in G$ מתקיים

$$(g \circ f)(g_1 g_2) = g(f(g_1 g_1)) = g(f(g_1) f(g_1)) = g(f(g_1)) g(f(g_1)) = (g \circ f)(g_1)(g \circ f)(g_2)$$

ולכן $g \circ f$ הומומורפיזם.

**שאלה 3.** תהינה $G, H$ שתי חבורות, ונסמן $K = G \times \{e_H\}$. הוכיחו כי $K \lhd G \times H$, $K \cong G$ וגם $(G \times H) / K \cong H$.

פתרון. יש להוכיח שהפונקציה $\varphi : G \to K$ המוגדרת לפי $\varphi(g) = (g, e_H)$ היא איזומורפיזם, ולכן $G \cong K$. לשאר הדרישות, יש להוכיח שההטלה $\pi : G \times H \to H$ המוגדרת לפי $\pi(g, h) = h$ היא אפימורפיזם, ושהגרעין שלו הוא בדיוק $K$.

## שאלות להגשה

**שאלה 4.** תהי $G$ חבורה, ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של $H$ ביחס ב-$G$ להיות

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H) \leq G$.

ב. הוכיחו כי $H \lhd N_G(H)$.

ג. הסבירו מדוע $N_G(H)$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של $G$ שבה $H$ נורמלית. הסיקו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

פתרון. א. המנרמל $N_G(H)$ לא ריק כי $e \in N_G(H)$, שהרי $eH = He$ לכל תת־חבורה של $G$. נשתמש בקריטריון המקוצר לתת־חבורה. יהיו $x, y \in N_G(H)$. לכן

$$xy^{-1}H = xHy^{-1} = Hxy^{-1}$$

כי $xH = Hx$ ומפני ש-$yH = Hy$, אז בכפל משמאל ומימין ב-$y^{-1}$ נקבל $Hy^{-1} = y^{-1}H$. לכן $xy^{-1} \in N_G(H)$, ולכן $N_G(H) \leq G$.

ב. אנחנו ידועים שלכל $h \in H$ מתקיים $hH = H = Hh$. לכן $H \subseteq N_G(H)$, ולכן $H \leq N_G(H)$. לפי הגדרה לכל $x \in N_G(H)$ מתקיים $xH = Hx$. לכן $H \lhd N_G(H)$.

ג. תהי תת־חבורה נורמלית $K \lhd G$ המכילה את $H$. לפי הגדרה לכל $x \in K$ מתקיים $xH = Hx$, ולכן $x \in N_G(H)$. כלומר $K \subseteq N_G(H)$.
אם $G = N_G(H)$, אז $H$ נורמלית ב-$G$ לפי הסעיף הקודם. בכיוון השני, אם $H$ נורמלית ב-$G$ אם לכל $x \in G$ מתקיים $xH = Hx$, כלומר אם $G = N_G(H)$.

**שאלה 5.** נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-$G$ הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{3}$ ו-$\frac{3}{11}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

פתרון. א. איבר היחידה בחבורה $G$ הוא המחלקה $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + 0$. לכן יש למצוא לכל $x \in G$ מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כך שנקבל $n \cdot x + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי החבורה חיבורית ולכן למציאת הסדר "העלאה בחזקה" היא כפל ב-$n$.
כל איבר בחבורה אפשר לרשום בצורה $x = \frac{a}{b} + \mathbb{Z}$ עבור $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. מכאן קל לראות כי $b \cdot \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. לכן $x$ הוא לכל היותר מסדר (סופי) $b$. נניח כי $\frac{a}{b}$ הוא שבר מצומצם, ולכן הסדר של $x$ במקרה זה הוא בדיוק $b$. ברור שסדרת השברים $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתאימה לסדרה של איברים ב-$G$ שסדרם עולה ממש.
מינוח: החבורה $G$ היא דוגמה לחבורה מפותלת מאקספוננט אינסופי.

ב. יש להוכיח שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיים $\left\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \right\rangle = \langle q + \mathbb{Z} \rangle$. נראה שאפשר לבחור את $q = \frac{1}{33}$. בשביל להראות הכלה דו־כיוונית, מספיק להראות הכלה של היוצרים. נשים לב כי $\frac{1}{33} = -2 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{3}{11}$, ולכן $\left\langle \frac{1}{33} + \mathbb{Z} \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
מצד שני $\frac{2}{3} = 22 \cdot \frac{1}{33}$, $\frac{3}{11} = 9 \cdot \frac{1}{33}$, ולכן $\left\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{33} + \mathbb{Z} \right\rangle$.
סדר תת־החבורה $H$ הוא 33 ואילו $G$ היא אינסופית, ולכן האינדקס שלה היא אינסופי לפי משפט לגראנז'. בנוגע לאינדקס, אפשר להראות גם שלכל שני מספרים ראשוניים שונים שאינם מחלקים את 33 יתקיים כי $p_1 + H \neq p_2 + H$ ולכן ישנן $p_1 \neq p_2$ אינסוף מחלקות שמאליות שונות.

**שאלה 6.** עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f : S_3 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

ג. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = [k]$ (כלומר שולחת כל מספר $k$ למחלקת השקילות שלו מודולו $n$).

ד. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k) = ([k], [k])$.

ה. $f_x : G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = x^{-2}gx^2$, כאשר $G$ חבורה ו-$x \in G$ איבר.

פתרון. א. הפונקציה היא הומומורפיזם, אבל לא מונומורפיזם כי למשל $f(1) = f(-1) = 1$. היא גם לא אפימורפיזם, כי למשל $3i \notin \operatorname{im} f$.

ב. הפונקציה הזו היא לא הומומורפיזם. למשל כי היחידה לא נשלחת ליחידה, או ש-$f(\mathrm{id} \cdot \mathrm{id}) \neq f(\mathrm{id})f(\mathrm{id})$.

ג. הפונקציה היא אפימורפיזם, כמו שראינו בכיתה. ההוכחה מסתמכת על כך שחיבור מודולו $n$ מוגדר היטב. היא לא מונומורפיזם, כי הסדר של המקור גדול ממש מסדר התמונה, או למשל כי $f(0) = f(n) = [0]$.

ד. הפונקציה היא הומומורפיזם, בדומה לסעיף הקודם. הפעם היא לא אפימורפיזם, עבור $n \geq 2$, מפני שסדר התמונה הוא $n$, ולא $n^2$. למשל $(0, 1) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ לא בתמונה. עבור $n = 1$ ברור מה קורה.

ה. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. סוג כזה של איזומורפיזם נקרא אוטומורפיזם פנימי. נראה שאכן מדובר בהומומורפיזם:

$$f_x(gh) = x^{-2}ghx^2 = x^{-2}gx^2x^{-2}hx^2 = f_x(g)f_x(h)$$

כדי לראות ש-$f_x$ הוא חח"ע נשים לב שאם $x^{-2}gx^2 = e$, אז $g = x^2ex^{-2}$ ולכן $g = e$. כדי להראות ש-$f_x$ הוא על, יהי $h \in G$. נבחר בתור המקור שלו את $x^2hx^{-2}$, ואכן $f_x(x^2hx^{-2}) = h$.

**שאלה 7.** יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם $G$ נוצרת סופית, אז גם $\operatorname{im} f$ היא חבורה נוצרת סופית. (ודאו שקל לכם להראות שההפך לא נכון.)

פתרון. ההוכחה דומה לתרגיל שבו הראנו שהתמונה של חבורה ציקלית היא גם ציקלית. נניח לפי הנתון כי $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, ונראה $\operatorname{im} f = \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$. בכיתה הוכחנו את המקרה $n = 1$.

יהי $h \in \operatorname{im} f$. לכן קיים $g \in G$ כך ש-$f(g) = h$. לפי ההנחה $g = a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_k}^{j_k}$, עבור $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ ו-$j_1, \dots, j_k \in \mathbb{Z}$ כלשהם, לאו דווקא שונים. נשתמש בכך ש-$f$ הומומורפיזם, ונקבל

$$f(g) = f(a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_k}^{j_k}) = f(a_{i_1})^{j_1} \dots f(a_{i_k})^{j_k} \in \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$$

כלומר $\operatorname{im} f \subseteq \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$. ההכלה השניה קלה להוכחה כששמים לב לכך ש-$f(a_1), \dots, f(a_n) \in \operatorname{im} f$.

**שאלה 8.** הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ (רמז: העזרו בשאלה הקודמת).

ב. קיים אפימורפיזם $f : \mathbb{Z}_{50} \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$.

ג. קיים מונומורפיזם $f : \mathbb{Z}_{63} \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_7$.

ד. קיים מונומורפיזם $f : D_4 \to \mathbb{Z}_8 \times U_8 \times U_8$.

ה. קיים איזומורפיזם $f : S_4 \to D_{12}$.

ו. קיים מונומורפיזם $f : S_4 \to S_5 \times D_{12}$.

הוכחה. א. לא קיים אפימורפיזם, כי $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ נוצרת סופית, ולכן לפי השאלה הקודמת התמונה חייבת להיות גם נוצרת סופית. אבל ראינו ש-$\mathbb{Q}$ אינה נוצרת סופית.

ב. לא קיים אפימורפיזם. מדובר בחבורות שוות עוצמה, ולכן אפימורפיזם יהיה גם איזומורפיזם. אבל בחבורה $\mathbb{Z}_{50}$ קיים איבר מסדר 50 (כמו $1 \in \mathbb{Z}_{50}$), ואילו בחבורה $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_5$ הסדר של כל האיברים הוא לכל היותר 10. לכן החבורות לא איזומורפיות. בדרך אחרת, אפשר להעזר בטענה ש-$\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ אם ורק אם $(n, m) = 1$.

ג. קיים מונומורפיזם. שוב, מדובר בחבורות שוות עוצמה כי $9 \cdot 7 = 63$, ולכן מונומורפיזם יהיה גם איזומורפיזם. ראינו בכיתה איך יוצרים איזומורפיזם כזה. כאן אפשרות אחת היא $f(x) = (x \bmod 9, x \bmod 7)$.

ד. לא קיים מונומורפיזם. ראינו בכיתה שאי אפשר לשכן חבורה לא אבלית בחבורה אבלית.

ה. לא קיים איזומורפיזם. נכון ששתי החבורות הן לא אבליות מסדר 24, אבל הן עדין לא איזומורפיות. בחבורה $D_{12}$ יש איבר מסדר 12, ואילו ב-$S_4$ הסדר של האיברים הוא לכל היותר 4.

ו. קיים מונומורפיזם. אנו יכולים לראות את $S_n$ כתת־חבורה של $S_{n+1}$ לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה $\sigma$ של $n$ איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. כלומר יש מונומורפיזם $f_1 : S_4 \to S_5$. כמובן שיש מונומורפיזם $f_2 : S_5 \to S_5 \times D_{12}$ המוגדר לפי $f_2(\sigma) = (\sigma, \mathrm{id})$. ההרכבה $f_2 \circ f_1$ היא דוגמה למונומורפיזם המבוקש.

$\square$

## שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

**שאלה 9.** תהי $G$ חבורה ויהיו $x, y \in G$ איברים. נתון כי $|G| = 14$, $x \neq e$ ו-$y \notin \langle x \rangle$. הוכיחו כי $\langle x, y \rangle = G$. נסו גם להוכיח $G \cong D_7$.

פתרון. נסמן $H = \langle x, y \rangle$. לפי משפט לגראנז' מתקיים כי $|H| \,|\, 14$. נפסול את כל הסדרים שקטנים מ-14. ברור כי $|H| \neq 1$ מפני ש-$x \in H$ וגם $x \neq e$. בנוסף $y \in H$ והוא אינו חזקה של $x$, בפרט $y \neq e = x^0$. כלומר $|H| \neq 2$. נניח בשלילה כי $|H| = 7$. אז נקבל כי $o(x) = 7$, לכן $H$ ציקלית, ולכן $y$ חזקה של $x$, שזו סתירה לנתון. כלומר $|H| = 14$ ואפשרות היחידה היא $H = G$.

**שאלה 10.** הוכיחו שחבורה $G$ היא היא איחוד של שלוש תת־חבורות אמיתיות שלה אם ורק אם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ היא תמונה אפימורפית של $G$. רמז: העזרו בשאלת רשות מתרגיל קודם.
תזכורת: חבורה $H$ נקראת תמונה אפימורפית של $G$ אם קיים אפימורפיזם $f : G \to H$.

בהצלחה!