פתרון תרגיל בית 8 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 22.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

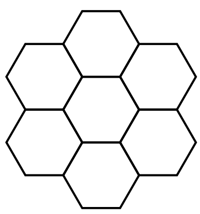
שאלה 1. הכלילו תרגיל שעשינו בכיתה: תהי G חבורת-p סופית הפועלת על קבוצה X מסדר זר ל-p. הוכיחו שקיימת ב-X נקודת שבת.

פתרון. גודל כל מסלול מחלק את $|G| = p^n$. לכן הגדלים האפשריים של המסלולים הם p^i עבור $0 \le i \le n$. מצד שני סכומם הוא $|X|$, שזר ל-p. אם לא קיימת נקודת שבת (כלומר אין מסלול מגודל 1), אז סכום גדלי המסלולים הוא סכום של מספרים המתחלקים ב-p, ולכן מתחלק ב-p. זו סתירה, ולכן קיימות ב-X נקודות שבת תחת הפעולה.

שאלות להגשה

שאלה 2. העזרו בלמה של ברנסייד כדי לענות על השאלות הבאות:

א. מכינים תחתיות לשתייה חמה בצורה



כל משבצת בלוח צבועה באחד משלושה צבעים. אם הופכים או מסובבים את התחתית מקבלים תחתית ששקולה אליה.
כמה תחתיות שונות אפשר ליצור (כלומר עד כדי סימטריות במרחב של משושה)?

ב. נניח והתחתיות לשתייה חמה הן לוח ריבועי בגודל $2n \times 2n$ וכל משבצת צבועה באחד מ-c צבעים. כמה תחתיות שונות אפשר ליצור כאשר רק הצד העליון של התחתיות צבוע (כלומר בלי שיקופים)?
רמז: אם מסתבכים, כדאי לנסות קודם עבור מספרים קטנים כדי להבין את הרעיון.

פתרון. א. שאלות מנייה כאלו דורשות שימוש בלמה של ברנסייד. הקבוצה שנפעל עליה היא $X = \mathbb{Z}_3^7$ כאשר כל איבר מתאים לצביעה שרירותית של תחתית והצבע של כל

משבצת בתחתית מתאים למספר ב-$\mathbb{Z}_3$. החבורה שפועלת על X היא $G = D_6$, חבורת הסימטריות של המשושה במישור. נחשב את גודל קבוצת נקודות השבת $|X^g|$ לכל $g \in G$:

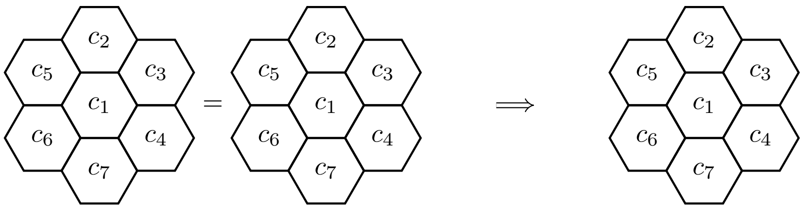
$g \in G$	$\lvert X^g \rvert$	סה"כ
id	3^7	3^7
$\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4$	3^5	$3 \cdot 3^5$
$\sigma^3, \tau\sigma, \tau\sigma^3, \tau\sigma^5$	3^4	$4 \cdot 3^4$
σ^2, σ^4	3^3	$2 \cdot 3^3$
σ, σ^5	3^2	$2 \cdot 3^2$

לפי הלמה של ברנסייד מספר המסלולים הוא

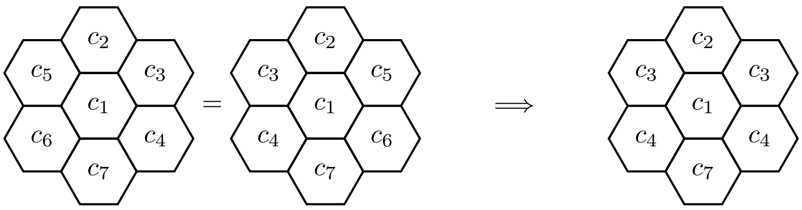
$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{12}\left(3^7 + 3 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2\right) = 276$$

וזה מספר התחתיות השונות, עד כדי סיבובים ושיקופים.

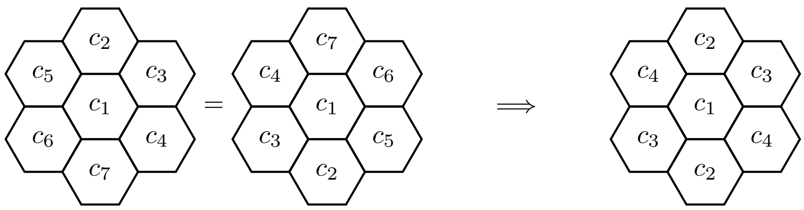
באופן מפורט, למי שתוהה לגבי החישובים בטבלה: יש לבדוק אילו תחתיות נשארות זהות, אחרי הפעלת איבר $g \in D_6$ (בנפרד לכל איבר). יהיו $c_i \in \mathbb{Z}_3$ צבעים כלשהם. עבור $g = \mathrm{id}$, כל תחתית הנצבעת

$\mathrm{id}\,*$ 

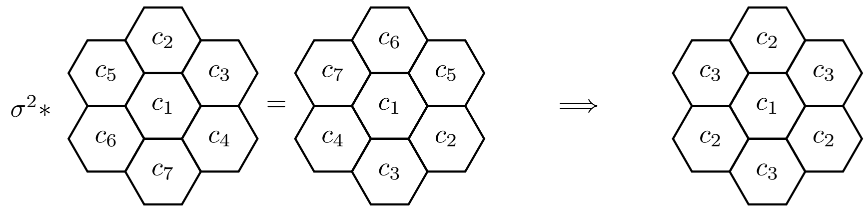
היא נקודת שבת. לכן $\left|X^{\mathrm{id}}\right| = 3^7$. עבור $g = \tau$, המייצג שיקוף לאורך הציר האנכי, רק תחתית הנצבעת

$\tau *$ 

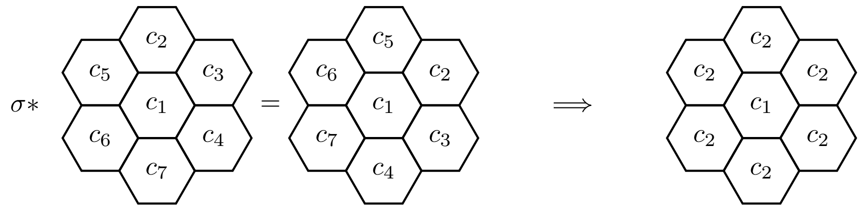
תהיה נקודת שבת. לכן $|X^\tau| = 3^5$. עבור האיבר σ^3, המייצג סיבוב ב-$180°$, הוא גם מסדר 2, אבל נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות

$\sigma^3 *$ 

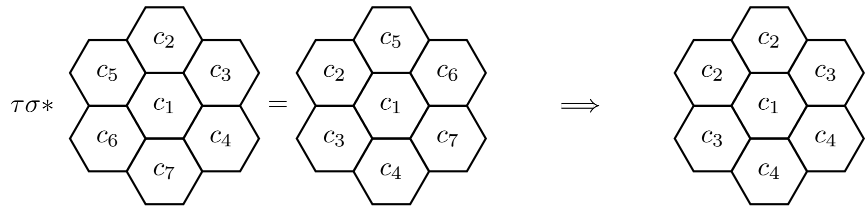
ולכן $\left|X^{\sigma^3}\right| = 3^4$. עבור האיבר σ^2, המייצג סיבוב ב-120°, נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות



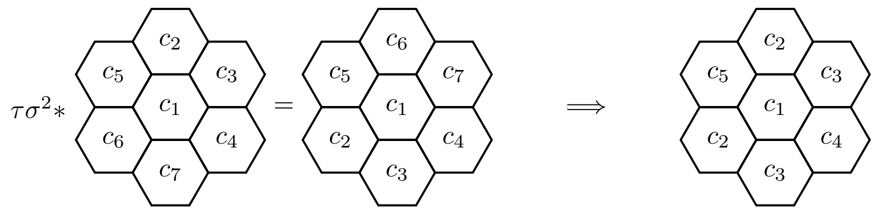
ולכן $\left|X^{\sigma^2}\right| = 3^3$. החישוב עבור σ^4 דומה. עבור האיבר σ, המייצג סיבוב ב-60°, נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות



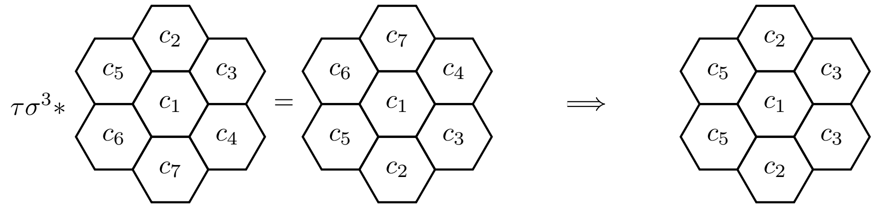
ולכן $|X^{\sigma}| = 3^2$. החישוב עבור σ^5 דומה. עבור האיבר $\tau\sigma$, נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות



ולכן $|X^{\tau\sigma}| = 3^4$. החישוב עבור $\tau\sigma^5$ דומה. עבור האיבר $\tau\sigma^2$, נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות



ולכן $\left|X^{\tau\sigma^2}\right| = 3^5$. החישוב עבור $\tau\sigma^4$ דומה. עבור האיבר $\tau\sigma^3$, נקודות השבת עבורו הן תחתיות הנצבעות



ולכן $\left|X^{\tau\sigma^3}\right| = 3^4$.

ב. שוב נשתמש בלמה של ברנסייד. הקבוצה שנפעל עליה היא $X = \mathbb{Z}_c^{4n^2}$ כאשר כל איבר של X מתאים לצביעה שרירותית של תחתית והצבע של כל משבצת בתחתית מתאים למספר ב-$\mathbb{Z}_c$. החבורה שפועלת על X היא $G = \langle \sigma \rangle \le D_4$, שמכילה את הסיבובים של ריבוע במישור (למי ששאל, קיים איזומורפיזם $G \cong \mathbb{Z}_4$). נחשב את גודל קבוצת נקודות השבת $|X^g|$ לכל $g \in G$:

סה"כ	$\lvert X^g\rvert$	$g \in G$
c^{4n^2}	c^{4n^2}	id
$2 \cdot c^{n^2}$	c^{n^2}	σ, σ^3
c^{2n^2}	c^{2n^2}	σ^2

לפי הלמה של ברנסייד מספר המסלולים הוא

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{4}\left(c^{4n^2} + 2 \cdot c^{n^2} + c^{2n^2}\right)$$

וזה מספר התחתיות השונות, עד כדי סיבובים במישור. גם כאן כדאי להוסיף תרשימים שמראים אילו תחתיות הן נקודות שבת תחת הפעולה לכל $g \in G$.

שאלה 3. יהי p ראשוני. מיינו את החבורות מסדר p^2 לפי ההדרכה הבאה:

א. הוכיחו שחבורה מסדר p^2 חייבת להיות אבלית.

ב. הוכיחו שהחבורות האבליות היחידות מסדר p^2 הן $\mathbb{Z}_{p^2}$ ו-$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, עד כדי איזומורפיזם.

פתרון. א. ראינו שהמרכז של חבורת-p אינו טריוויאלי. לכן $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. אם $|Z(G)| = p^2$, אז החבורה אבלית. אם $|Z(G)| = p$, אז מפני המרכז הוא תת־חבורה נורמלית, אפשר להסתכל על חבורת המנה ${}^{G}\!/\!{}_{Z(G)}$. המנה ${}^{G}\!/\!{}_{Z(G)}$ ציקלית כי היא מסדר p, ולפי טענה שראינו, בהכרח טריוויאלית. לכן G אבלית.

ב. הסדרים האפשריים לאיברים הם $1, p, p^2$. אם קיים איבר מסדר p^2, אז $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$. אחרת הסדר של כל האיברים הוא p, פרט לאיבר היחידה. כבר הראיתם בבוחן ש-G נוצרת על ידי שני איברים a, b מסדר p. לכן קיים יצוג סופי $G = \langle a, b \,|\, a^p = b^p = e, ab = ba \rangle$. כבר הראתם בכיתה שבמקרה כזה $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. אפשרות אחרת, היא לבנות איזומורפיזם מפורש $(i, j) \mapsto a^i b^j$.

שאלה 4. תהי G חבורת-p סופית ותהי $N \lhd G$ לא טריוויאלית. הוכיחו כי החיתוך $Z(G) \cap N$ לא טריוויאלי. רמז: G פועלת על N על ידי הצמדה.

פתרון. נעזר ברמז, לפיו G פועלת על N על ידי הצמדה. לפי משוואת המחלקות

$$|N| = |\mathrm{fp}| + \sum |\mathrm{orb}(x_i)|$$

כאשר fp הוא אוסף נקודות השבת (Fixed points), והסכימה היא על נציגים של המסלולים שאינם נקודות שבת.

מי הם המסלולים בפעולה? אלו הן מחלקות צמידות של G. לכן N היא איחוד זר של מחלקות צמידות של G. מי הן נקודות השבת של הפעולה? איברים שנשמרים תחת הצמדה מ-G, כלומר איברים ב-$Z(G)$.

ידוע לנו שהסדר של N הוא חזקת p, וגם שהגודל של כל מחלקות צמידות הוא חזקה של p. כלומר $|N|$ הוא סכום חזקות של p. אבל קיימת מחלקת הצמידות של היחידה $e \in N \cap Z(G)$, שהיא מגודל 1. לכן בהכרח N מכילה עוד מחלקות צמידות מגודל 1, שהן כאמור מכילות איברים של $Z(G)$.

שאלה 5. חשבו את הסדר של כל מחלקות הצמידות של החבורות הבאות:

א. S_5

ב. D_5 (רמז: אין צורך בחישוב ישיר לכל איבר)

פתרון. א. ראינו שמחלקות הצמידות של S_n מקבילות לחלוקות של n לפי מבני המחזורים. חישוב הגודל של כל מחלקות צמידות הוא תרגיל קומבינטורי שעשינו דומים לו בכיתה. נקבל

$$\begin{aligned}
|\{(*****)\}| &= \binom{5}{5}(5-1)! = 24 \\
|\{(****)\}| &= \binom{5}{4}(4-1)! = 30 \\
|\{(***)\,(**)\}| &= \binom{5}{3}(3-1)!\binom{5-3}{2}(2-1)! = 20 \\
|\{(***)\}| &= \binom{5}{3}(3-1)! = 20 \\
|\{(**)\,(**)\}| &= \binom{5}{2}(2-1)!\binom{5-2}{2}(2-1)!\frac{1}{2!} = 15 \\
|\{(**)\}| &= \binom{5}{2}(2-1)! = 10 \\
|\{\mathrm{id}\}| &= 1
\end{aligned}$$

ב. איבר היחידה הוא במחלקת צמידות משל עצמו, והסכום במשוואת המחלקות הוא 10. הגודל של מחלקת צמידות מחלק את 10. לכן בהכרח הגדלים של מחלקות הצמידות הם $1, 2, 2, 5$, כי המרכז טריוויאלי, ומכאן שאין עוד איברים שמחלקת הצמידות שלהם היא מגודל 1.

שאלה 6. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש-$|X| > 2$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

א. הוכיחו שאם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי זה ש-G פועלת 2-טרנזיטיבית שקול לכך ש-G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ ו-G פועלת על המכפלה רכיב-רכיב.

ג. יהי F שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית.

ד. אם $|F| = 2$, הראו ש-$GL_2(F)$ כן פועלת 2-טרנזיטיבית.

פתרון. א. לכל שני איברים $x, y \in X$ ניקח איבר $x \neq z \in X$ (קיים כזה לפי הדרישה על הגודל של X).
נתבונן בזוגות $x \neq y$ ו-$x \neq z$. מכיוון שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית יש $g \in G$ כך ש-$g * x = y$ (וגם $g * z = x$ אבל זה לא חשוב).

ב. יהיו $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ כלומר $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$. אם הפעולה של G היא 2- טרנזיטיבית, אז קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ ו-$g * x_2 = y_2$. לכן

$$g * (x_1, x_2) = (g * x_1, g * x_2) = (y_1, y_2)$$

בכיוון השני, אם $x_1 \neq x_2$ ו-$y_1 \neq y_2$, אז $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X \setminus \Delta$ וקיים $g \in G$ כך ש-$g * (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. כלומר $g * x_i = y_i$.

ג. בשביל טרנזיטיביות, מספיק להראות שיש וקטור שהמסלול שלו הוא כל $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.
נראה זאת עבור הוקטור $\binom{1}{0}$. יהי $v \in F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ וקטור כלשהו, ונשלים אותו לבסיס (אפשר, כי הוא לא אפס) $\{v, w\}$.
ידוע ממשפט ההגדרה (מאלגברה לינארית) שקיימת העתקה לינארית שמעבירה את $\binom{1}{0}$ ל-v ואת $\binom{1}{0}$ ל-w. מכיוון ש-$\{v, w\}$ הוא בסיס אז ההעתקה הזו היא הפיכה, ולכן המטריצה המייצגת שלה תהיה מ-$GL_2(F)$.
הפעולה היא לא 2-טרנזיטיבית, כי למשל אם ניקח $\binom{\alpha}{0} \neq \binom{1}{0}$ ו- $\binom{1}{0} \neq \binom{0}{1}$, עבור $\alpha \neq 0, 1$ (קיימת α כזו כי $|F| > 2$). אז אין מטריצה A כך ש-$A\binom{1}{0} = \binom{\alpha}{0}$ וגם $\alpha \cdot A\binom{1}{0} = A\binom{\alpha}{0} = \binom{0}{1}$.

ד. אם $|F| = 2$, אז אפשר להוכיח $GL_2(F) \cong S_3$. הפעולה של $GL_2(F)$ על הקבוצה $F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ היא למעשה הפעולה של S_3 על $\{1, 2, 3\}$, שהיא 2-טרנזיטיבית.
באופן יותר ישיר, אם בוחרים שני וקטורים $x_1 \neq x_2 \in F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, אז נקבל בסיס של F^2. לפי קיום של מטריצות מעבר לכל בסיס אחר $y_1 \neq y_2 \in F^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$, מקבלים שהפעולה היא 2-טרנזיטיבית.

שאלה 7. תהי $\pi = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7)(8, 9, 10) \in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.

פתרון. המרכז $C_{S_{10}}(\pi)$ הוא המייצב לגבי פעולת ההצמדה של S_{10} על עצמה. המסלול הוא מחלקת הצמידות של π, וידוע לנו כי

$$|\mathrm{conj}(\pi)| = [S_{10} : C_{S_{10}}(\pi)] = \frac{|S_{10}|}{|C_{S_{10}}(\pi)|}$$

ולכן מספיק לחשב כמה תמורות צמודות ל-π ב-S_{10}. אך מחלקות צמידות ב-S_n נקבעות לפי מבנה המחזורים. כמה מחזורים יש מן המבנה $(4, 3, 3)$? ודאו שאתם יודעים לפתור את השאלה הקומבינטורית הזו ולקבל:

$$\begin{aligned} |C_{S_{10}}(\pi)| &= \frac{|S_{10}|}{|\mathrm{conj}(\pi)|} = \frac{10!}{\binom{10}{4}(4-1)!\binom{10-4}{3}(3-1)!\binom{6-3}{3}(3-1)!\frac{1}{2!}} \\ &= \frac{10!}{\frac{10!}{4!6!}3!\frac{6!}{3!3!}2!\frac{3!}{3!0!}2!\frac{1}{2!}} = 72 \end{aligned}$$

שאלה 8 (קצת חזרה)**.** תהי G חבורה. הפריכו לפחות שלוש מהטענות השגויות הבאות:

א. אם $N, K \lhd G$ וגם $N \cong K$, אז ${}^{G}/_{N} \cong {}^{G}/_{K}$.

ב. אם $N \lhd G$ וגם ${}^{G}/_{N} \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.

ג. אם $H \leq G$, אז $Z(H) \lhd G$.

ד. אם $H, K \leq G$, אז גם $HK \leq G$.

ה. אם $N \lhd G$ לא טריוויאלית ומסדר אי זוגי, וגם G/N מסדר אי זוגי, אז G אבלית.

פתרון. א. ראינו בכיתה כי $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ עבור $n \neq 0$. החבורה $G = \mathbb{Z}$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. כמו כן ראינו $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. לכן אם נבחר $N = 2\mathbb{Z}$ ו-$K = 3\mathbb{Z}$ נקבל כי $N \cong K$, אבל המנות $G/N \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$G/K \cong \mathbb{Z}_3$ לא איזומורפיות כי הן מסדר שונה.

ב. ברור שחייבים לבחור חבורה אינסופית. הרי אם G סופית ו-$|N| > 1$, אז $|G/N| = |G| / |N|$ קטן ממש מ-$|G|$. הדרך הנוחה למצוא פתרון היא למצוא אפימורפיזם $f : G \to G$ שהוא לא מונומורפיזם. אז הגרעין שלו הוא תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים $G/\ker f \cong G$.
נבחר $G = \mathbb{C}^*$, ונגדיר אפימורפיזם $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ לפי $f(x) = x^2$. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אפימורפיזם. הגרעין $\ker f$ איננו טריוויאלי, כי גם $-1 \in \ker f$.
אפשרות אחרת היא $G = \mathbb{R}[x]$, אוסף הפולינומים הממשיים, עם הפעולה של חיבור פולינומים. אפשר לוודא שזו אכן חבורה, ושהיא אבלית. נבחר את אוסף הפולינומים הקבועים $H = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$. ברור ש-$H \neq \{0\}$ (הפולינום הקבוע 0 הוא איבר היחידה ב-G), אבל מתקיים $G/H \cong G$. נסו למצוא דוגמאות נוספות (למשל מכפלה ישרה).

ג. כמעט כל חבורה לא אבלית ותת־חבורה שלה שנבחר תעבוד כדוגמה נגדית. למשל אם נבחר $G = D_4$ ואת $H = \langle \tau \rangle \leq G$. ידוע לנו כי H מסדר 2, ולכן אבלית. כלומר $Z(H) = H$. ראינו כבר מי הן תת־החבורות הנורמליות של D_4, וש-H היא לא אחת מהן.

ד. נשתמש בבחירות מן הדוגמה הקודמת. צריך לבחור תת־חבורה K שאינה נורמלית (אחרת HK תהיה תת־חבורה של G). נבחר $K = \langle \tau\sigma \rangle = \{\mathrm{id}, \tau\sigma\}$. הקבוצה $HK = \{\mathrm{id}, \tau, \tau\sigma, \sigma\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma \cdot \sigma = \tau\sigma^2 \notin HK$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1} \notin HK$.

ה. נבחר את חבורת הייזנברג $G = H(\mathbb{Z}_3)$. ראינו שזו חבורה לא אבלית ומסדר 27. נבחר את $N = Z(G)$ שאינה טריוויאלית (היא מסדר 3), והמנה G/N מסדר 9.
למעשה כל חבורה לא אבלית מסדר p^n עבור $p \neq 2$ ראשוני תתאים, ועבורה נבחר $N = Z(G)$. נסו למצוא עוד דוגמאות נגד כאשר G אינה חבורת-p.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. רוצים להכין צמידים מ-17 חרוזים שבאים בשני צבעים. כמה צמידים שונים אפשר להכין כאשר שני צמידים הם שקולים אם הם סיבוב אחד של השני? רמז: הלמה של ברנסייד עם החבורה $\mathbb{Z}_{17}$. נסו גם להכליל זאת למספר שרירותי של חרוזים.

שאלה 10. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:

$$
\begin{tikzcd}
& & G \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
& N_1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & N_2 \arrow[d, dash] & N_3 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H_1 \arrow[drr, dash] & H_2 \arrow[dr, dash] & N_4 \arrow[d, dash] & H_3 \arrow[dl, dash] & H_4 \arrow[dll, dash] \\
& & \{e\} & &
\end{tikzcd}
$$

כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.

בהצלחה!