תזכורת: ראינו את שיטת החציה, שמבוססת על "אריה במדבר" - חיפוש בינארי.
ראינו קריטריונים לעצירה:

- גודל האינטרוול - עוצרים כאשר שטח החיפוש קטן מגודל מסויים קבוע מראש.
- הערך המוחלט של הפונקציה - עוצרים כאשר הערך המוחלט של ערך הפונקציה מספיק קטן.
  זה קריטריון מסוכן, כי לא בטוח שזה יתן לנו קירוב מספיק טוב.
- הקריטריון האדמיניסטרטיבי - עוצרים לאחר מספר מסויים של איטרציות.

קירוב לינארי - שיטת הSecant

פירוש המילה Secant - חותך.

הנחות:
- יש ערכים התחלתיים x_0, x_1, שצריכים להיות קרובים מספיק לשורש.
- בשונה משיטת החצייה, כאן לא מניחים מראש שהשורש נמצא ביניהם - זו לא דרישה.
- בכל שלב יהיו x_0, x_1 תורניים, ומניחים שx_1 קרוב יותר לשורש.

בכל שלב, מעביר בין x_0 לx_1 קו ישר, ובודקים איפה הוא חותך את ציר הx - מסמנים x_2.
את הנקודה הזו בוחרים בתור נקודה חדשה - כלומר מבצעים $\begin{matrix} x_0 \leftarrow x_1 \\ x_1 \leftarrow x_2 \end{matrix}$

מדמיון משולשים נקבל

$$\frac{x_1 - x_2}{f(x_1)} = \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$$

או

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)}$$

ובאופן כללי:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

הרעיון הוא שבקטע קטן בסביבת השורש, אפשר לעשות קירוב לינארי לפונקציה.
השיטה דורשת ש$|f(x_1)| < |f(x_0)|$. ניתן לבדוק את זה בקלות ולהחליף במידת השורש

מימוש

if $|f(x_0)| < |f(x_1)|$ then

  swap(x_0,x_1);

repeat

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)};$$
x_0=x_1;
x_1=x_2;

until $|f(x_2)| < \mathrm{Tol}$;

כמו בשיטת החציה, גם כאן ניתן להשתמש בקריטריוני סיום חלופיים - למשל $|x_1 - x_0| < \mathrm{Tol}$ או מספר האיטרציות.

יעילות

למשל, לאחר 5 איטרציות במקרה של הפונקציה $f(x) = 3x + \sin x - e^x$ מגיעים לתוצאה יותר מדוייקת מאשר עם 13 איטרציות עם שיטת החציה.

נקודת תורפה

ייתכנו מקרים "פתולוגיים" שבהם ערכי x המתקבלים רחוקים יותר מהשורש בהשוואה לערכים הקודמים. למשל - כאשר הפונקציה רחוקה מלהיות לינארית סביב השורש, או כאשר היא לא מונוטונית.

פתרון

נרצה לתחום את השורש מלכתחילה, כמו בשיטת החציה - כלומר לדרוש שהשורש יהיה בתוך האינטרוול ההתחלתי: $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.

מכיוון שx_2 תמיד חיובי או שלילי(אם הוא אפס - אז סיימנו), ניתן לשמור על התנאי הזה לכל אורך החישוב:

repeat

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_0 - x_1}{f(x_0) - f(x_1)};$$
if $f(x_0) \cdot f(x_2) < 0$ then

  x_1=x_2;

else x_0=x_2;

until $|f(x_2)| < \mathrm{Tol}$

הערות

- ייתכנו מקרים שבהם שיטת הSecant פחות יעילה משיטת החציה.

שיטת ניוטון־רפסון

שיטה קלאסית(בת 400 שנה)

הנחות:

- יש ערך התחלתי x_0.
- בהנחה שx_0 מספיק קרוב לשורש, השיטה תתכנסת בצורה יותר יעילה מכל השיטות שהזכרנו.
- סדר ההתכנסות הוא ריבועי, בניגוד לשיטות הקודמות שהן בסדר התכנסות לינארי. הכוונה היא שהאינטרוול קטן בקצב ריבועי.

הרעיון הוא להסתכל על $f\left(x_0\right)$, ולהעביר משיק דרך הנקודה הזו. נקודת המפגש של המשיק הזה עם ציר הx תהיה הx_0 החדשה(כלומר x_1)

חישוב המשיק: נזכור ששיפוע המשיק הוא בעצם נגזרת:

$$\tan\theta = f'\left(x_0\right) = \frac{f\left(x_0\right)}{x_0 - x_1}$$

כלומר

$$x_1 = x_0 - \frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}$$

ובאופן כללי

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

מימוש

evaluate $f\left(x_0\right), f'\left(x_0\right)$;
`if(`$f\left(x_0\right) \neq 0 \wedge f'\left(x_0\right) \neq 0$`) then`

`repeat`

x_1=x_0;

x_0=$x_0 - \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}$;

`until` $\left|x_1 - x_0\right| < \mathrm{Tol}_1$ `or` $\left|f\left(x_0\right)\right| < \mathrm{Tol}_2$

הערות

- צריך לחשב את הנגזרת! זה לא פעולה טריוויאלית
- אפשר גם למצוא שורשים מרוכבים
- אפשר למצוא באמצעות השיטה שורשי פולינומים
- יכול להיות מצב שהשיטה לא מתכנסת - למשל במקרה שנתקעים על נקודת קיצון

הדמיון בין ניוטון־רפסון לשיטת הSecant

ניתן לכתוב את הנוסחה של שיטת הSecant בתור:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{\frac{f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)}{x_n-x_{n-1}}}$$

כאשר $\left|x_n-x_{n-1}\right|\to 0$, הביטוי $\frac{f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)}{x_n-x_{n-1}}$ הוא הנגזרת!

יעילות

עבור הפונקציה $f\left(x\right)=3x+\sin x-e^x$, תוך 3 איטרציות מקבלים דיוק עד 7 ספרות!

שיטת Muller(אפרוקסימציה ריבועית)

במקום לבצע קירוב לינארי מבצעים קירוב ריבועי.

במקום לבחור 2 נקודות x_0,x_1 ולהעביר ביניהן ישר, בוחרים 3 נקודות x_0,x_1,x_2 ומעבירים ביניהן פרבולה. ההנחה היא שהקירוב הריבועי יותר טוב מהקירוב הלינארי.

ניתן למצוא פרבולה מ3 נקודות באמצעות פתרון מערכת משוואות לינארית ב3 משתנים, אבל כדי שזה יהיה קירוב מספיק טוב, בוחרים $c=f\left(x_2\right)$, ורושמים את הפרבולה בתור $P\left(x\right)=a\left(x-x_2\right)^2+b\left(x-x_2\right)+c$, ואז פותרים 2 משוואות:

$$\begin{cases} a\left(x_0-x_2\right)^2+b\left(x_0-x_2\right)+c=f\left(x_0\right) \\ a\left(x_1-x_2\right)^2+b\left(x_1-x_2\right)+c=f\left(x_1\right) \end{cases}$$

איטרציות נקודות שבת(Fixed Point)

גם כאן רוצים למצוא שורש למשוואה $f\left(x\right)=0$.

יש עניין ואפילו תועלת לדבר דווקא על המשוואה $x=g\left(x\right)$, ששקולה למשוואה $f\left(x\right)=0$.

בתנאים מסויימים, נקבל $x_{n+1}=g\left(x_n\right)$, ונרצה שזה יתכנס.

דוגמה

$$f\left(x\right)=x^2-2x-3=0$$

השורשים הם $-1,3$
נניח $x=g\left(x\right)=\sqrt{2x+3}$

הערה: $g\left(3\right)=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$ וזה בסדר, אבל עבור השורש השני נקבל $g\left(-1\right)=\sqrt{-2+3}=\sqrt{1}=1$ - וזה לא טוב.

אם נתחיל מ$x_0=4$, אז נקבל:

$$x_1=g\left(x_0\right)=\sqrt{8+3}=\sqrt{12}$$

$$x_2=g\left(x_1\right)=\sqrt{2\sqrt{12}+3}=...$$

ונקבל שזה מתכנס.

פונקציה אחרות יתנו סדרות ערכים אחרות, שיכולות להתכנס או להתבדר בנפרד לכל אחד מהשורשים.

המשמעות הגיאומטרית

מסתכלים על $g\left(x\right)$ ביחס לקו ישר $y=x$. בכל איטרציה מוצאים את $g\left(x\right)$, לפי זה מוצאים את y, ולפי זה מוצאים את הx החדש. זה אומר להתכנס לנקודת החיתוך של $g\left(x\right)$ ו$y=x$, שהיא נקודת השבת - אבל רק בהנחה שבוחרים פונקציה g מתאימה. אם לא בוחרים פונקציה מתאימה - למשל $\frac{x^2-3}{2}$ או $\frac{3}{x-2}$ - זה מתבדר.

זה תלוי בקצב הגדילה של הפונקציה ביחס ל$y=x$. כשקצב הגדילה מאוד גבוה יחסית אז יש התבדרות, וכשקצב השינוי בg(הנגזרת) קטן מקצב השינוי של $y=x$(תמיד 1) אז זה יכול להתכנס.