

## תרגיל 12: ערכים עצמיים + לכסון

**שאלה 1.** במידה וניתן, לכסן את המטריצות הבאות (ישנה אלגברה קשה במצאת השורשים לפולינום האופייני, אך אל יאוש: -)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} .1$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -6 & -1 & 3 \\ 12 & 6 & -4 \end{pmatrix} .2$$

**שאלה 2.** עבור אילו ערכי  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{pmatrix}$  אינה לכסינה מעל  $\mathbb{R}$

**שאלה 3.** הוכיחו של-  $A, A^t$  יש אותם ע"ע.

**שאלה 4.** תהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  הראה שקיימות מטריצות הפיכות  $B, C$  כך ש-  $A = B + C$

**שאלה 5.** תהי  $A$  מטריצה כך שסכום כל שורה שווה ל- $\alpha$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \alpha \\ \rightarrow \alpha \\ \vdots \\ \rightarrow \alpha \end{array} \end{array} \right]$$

הוכח ש- $\alpha$  הוא ע"ע של  $A$

**שאלה 6.** חשב את  $A^{-2}, A^{12}$  עבור המטריצה (רמז: משפט קיילי המילטון)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**שאלה 7.** מטרת התרגיל היא למצוא את כל הע"ע של המטריצה מהצורה

$$C_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \alpha & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha & i=j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

(הערה: התרגיל הזה קשה מאוד והינו למטיבי לכת במידה והצלחתם היו גאים בעצמכם, במידה ולא הצלחתם גם אחרי הצצה בתשובות אין הדבר מעיד על היכולות שלכם).

1. יהי  $\lambda_1$  ע"ע של המטריצה  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  עם ריבוי גאומטרי  $n$  ו- $\lambda_2$  ע"ע של המטריצה  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  עם ריבוי גאומטרי  $k \leq n$  הוכח ש- $\lambda_1 + \lambda_2$  הוא ע"ע של המטריצה  $A + B$  עם ריבוי גאומטרי  $k$ .

2. מצא את כל הע"ע (עם הריבויים הגאומטריים שלהם) עבור המטריצה  $\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

3. מצא את כל הע"ע של המטריצה  $C_n(\alpha)$

**שאלה 8.** תהי סדרת  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$  סדרת פיבונצ'י המוגדרת כעל ידי כלל נסיגה

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n > 2 \end{cases}$$

$$1. \text{ מצא } A \text{ כך ש-} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. חשב את  $A^{n-1}$ . (רמז: לכסן את המטריצה, לא להבהל אם החישובים לא יפים)

$$3. \text{ ניתן להסיק ש-} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ העזרת זה מצא את הנוסחא ל-} a_n.$$

**בהצלחה (-:**