תרגול 3 – אנליזה מודרנית

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S \subseteq P(X)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A \in S \Rightarrow A^c \in S$.

ii. $X \in S$.

iii. $\{E_n\} \in S \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S$

1. מצא דוגמא לקבוצה X ושתי סיגמא אלגברות S_1 ו S_2, כל אחת מכילה תת קבוצות של X כך ש $S_1 \bigcup S_2$ אינה סיגמא אלגברה.

פתרון: ניקח $X = \{1,2,3\}$, $S_1 = \{\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$ ו $S_2 = \{\{1,2\},\{3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$. קל לראות כי S_1 ו S_2 הינן סיגמא אלגברות ואילו $S_1 \bigcup S_2 = \{\{1,2\},\{3,\},\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$ אינה סיגמא אלגברה שכן $\{1,2\} \cap \{2,3\} \notin S_1 \cup S_2$.

2. נניח כי $S_1 \subset S_2 \subseteq \cdots$ הינן סיגמא אלגברות המכילות תת קבוצות של X . האם $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ הינה סיגמא אלגברה? אם לא תן דוגמא נגדית.

פתרון: נבחר את X להיות כל הסדרות המקבלות 0 או 1 כלומר $X = \{\{x_i\} : x_i = 0 \vee x_i = 1\}$. נגדיר את S_1 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מהקבוצה $A_1 = \{\{x_i\} : \{x_i\} \in X, x_1 = 1\}$. נגדיר את S_2 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מ A_1 ו $A_2 = \{\{x_i\} : \{x_i\} \in X, x_2 = 1\}$. באופן איטרטיבי נגדיר את S_{n+1} להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות ב S_n והקבוצה $A_{n+1} = \{\{x_i\} : \{x_i\} \in X, x_{n+1} = 1\}$. אינטואיטיבית ניתן להבין זאת כך: בסיגמא אלגברה S_n ניתן להבדיל בין ה n איברים הראשונים של הסדרות ב X . ברור כי $S_1 \subset S_2 \subseteq \cdots$ שכן כך בנינו אותן. נגדיר $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ ונראה כי $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \notin S$. נניח בשלילה כי $A \in S$, אזי בהכרח כי $A \in S_n$ לאיזשהו $n \in \mathbb{N}$, אבל $A = \{(1,1,\ldots)\}$, כלומר A הינה קבוצה בעלת איבר אחד ואילו ב S_n כל הקבוצות הינן אינסופיות ולכן סתירה. מכאן ש S איננה סיגמא אלגברה.

3. הראו כי הסיגמא אלגברה הנוצרת ע"י הנקודונים ב $\mathbb{R}$ מוכלת ממש בסיגמא אלגברה בורל ב $\mathbb{R}$.

פתרון: נגדיר סיגמא אלגברה חדשה

$$S=\{A\subseteq\mathbb{R}\mid A\text{ is countable or }A^c\text{ is countable}\}$$

טענה: S הינה סיגמא אלגברה.

הוכחה: נבדוק תכונות

i. $\varnothing\in S\Rightarrow\mathbb{R}\in S$

ii. $A\in S\Rightarrow A\text{ is countable}\vee A^c\text{ is countable}\Rightarrow A^c\in S$

iii. נניח כי $\{A_n\}\in S$. אזי יתכנו 2 מקרים:

א. A_n בן מנייה לכל $n\in\mathbb{N}$. במקרה כזה ברור כי $\bigcup_n A_n$ הינה קבוצה בת מנייה ו $\bigcup_n A_n\in S$.

ב. אחת מהקבוצות A_n אינה בת מנייה נסמן אותה ב A_{n_0}. במקרה כזה $\left(\bigcup_n A_n\right)^c=\bigcap_n A_n{}^c=\bigcap_n A_n{}^c\cap A_{n_0}{}^c$ ולכן בת מנייה ולכן $\bigcup_n A_n\in S$.

מכאן קיבלנו ש S הינה סיגמא אלגברה.

כעת , נשים לב כי S מכילה את כל הנקודונים ב $\mathbb{R}$ ומכאן ש $\sigma\left(\{x\mid x\in\mathbb{R}\}\right)\subseteq S$. ברור כי $S\subset\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ וסיימנו.

תזכורת: מידת לבג הינה הצימצום של מידת לבג החיצונית על הקבוצות המדידות. ע"י זה שאנו מצמצמים את התחום (הקבוצות שעליהן המידה מוגדרת) אנו מרוויחים את התכונה הבאה:

אם $\{E_n\}$ אוסף של קבוצות מדידות זרות אזי מתקיים

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m\left(E_n\right).$$

ראינו שעבור המידה החיצונית שמוגדרת על כל הקבוצות ב $\mathbb{R}$ תכונה זו לא מתקיימת תמיד.

בנוסף למידת לבג, ניתן להגדיר עוד מידות על $\mathbb{R}$. באופן יותר כללי, תהי S סיגמא אלגברה על קבוצה X , אזי μ מידה על S אם מתקיימות התכונות הבאות:

i. $\mu:S\to\mathbb{R}^+$.

ii. $\mu\left(\varnothing\right)=0$.

iii. אם $\{E_n\}$ זרות ב S אזי $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_n\right)$.

אפשר להראות כי תכונות המידה הן:

i. $A,B\in S$ ו $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.

ii. אם $A_i\in S$ אז $\mu\left(\bigcup_i A_i\right)\le\sum_i A_i$.

iii. אם $A_i\in S$ וגם $A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_i A_i\right)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$.

iv. אם $A_i\in S$ וגם $A_i\supseteq A_{i+1}$ אזי אם $\mu(A_1)<\infty$ אז $\mu\left(\bigcap_i A_i\right)=\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$.

4. מצאו דוגמא נגדית למקרה הרביעי. כלומר, הניחו שכל התנאים מתקיימים מלבד $\mu(A_1)=\infty$ והראו שמתקיים $\mu\left(\bigcap_i A_i\right)\ne\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)$.

פתרון: תהי $\mu=m$, מידת לבג. נסתכל על הקבוצות הבאות $\mathrm{E}_n=[n,\infty)$. ברור כי $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$ ולכן, עפ"י תכונה 2 של המידה נובע כי $0=\mu(\varnothing)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)$. מצד שני לכל n $\mu([n,\infty))=\infty$ ולכן $0=\mu\left(\bigcap_i A_i\right)\ne\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)=\infty$.

לפעמים יש לנו מידה על קבוצה X עם σ -אלגברה כלשהי ואנו רוצים להסתכל רק על תת קבוצה של A , $B\subseteq A$. לדוגמא, אנו רוצים לצמצם את מידת לבג על הקטע $[0,1]$. על מנת לעשות זאת נוכיח שתי טענות.

5. תהי S סיגמא אלגברה על X ותהי B קבוצה מדידה ב S. הוכיחו כי $S_B=\{E\mid E=A\cap B, A\text{ is S measurable}\}$ הינה סיגמא אלגברה על B .

פתרון: נבדוק אם התנאים מתקיימים.

i. $X\in S\Rightarrow X\cap B=B\in S$.

ii. $E\in B\Rightarrow\exists A\in S\wedge E=A\cap B\Rightarrow A^c\in S\wedge A^c\cap B=B-E\in S_B$.

iii. $\{E_n\}\in S_B\Rightarrow\exists\{A_n\}\in S\wedge A_n\cap B=E_n\Rightarrow\left(\cup A_n\right)\cap B\in S_B$

$$\Rightarrow\cup\left(A_n\cap B\right)=\bigcup E_n\in S_B$$

ומכאן ש S_B הינה סיגמא אלגברה.

6. הוכח כי אם (X,S,μ) הינו ממ"ח, $B\in S$, ונגדיר $\nu(A)=\mu(A\cap B)$ עבור $A\in S$ אזי ν הינה מידה.

פתרון: נבדוק את התכונות הנדרשות ממידה.

i. $\nu(\varnothing)=\mu(\varnothing\cap B)=\mu(\varnothing)=0$

ii. $\nu(A)=\mu(A\cap B)\geq 0$

iii. נניח כי $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות ב S , אזי

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(B\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)$$

מכיוון ש E_n זרות נובע כי גם $B\cap E_n$ זרות ולכן, כיוון ש μ הינה מידה נקבל

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap B)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n).$$

7. יהי ה (X,S) מרחב מדיד ו μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית וכך ש $\mu(\varnothing)=0$. נניח שאם A_n הינה סדרת קבוצות עולה אז מתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$. הראו כי μ הינה מידה.

פתרון: מספיק להראות שאם $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות אזי מתקיים $\mu\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n\mu(E_n)$ (סיגמא – אדיטיביות). נגדיר סדרה חדשה $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$. זוהי סדרה עולה , ומתוך האדיטיביות הסופית של μ נובע כי $\mu(F_n)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$. מתקיים גם ש $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ ולכן

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$