תרגיל בית 8 תורת גלואה - תשע"ח

1. חשב את חבורת גלואה של ההרחבות הבאות:

   א. $\mathbb{Q}[\rho_9]/\mathbb{Q}$

   ב. $\mathbb{Q}[\rho_9]/\mathbb{Q}[\rho_3]$

2. חשבו את הפולינומים הציקלוטומיים $\Phi_n(x)$ מעל $\mathbb{Q}$, עבור:

   א. $n=12$.

   ב. $n=8$.

   ג. $n=2^k$

3. תהי $F\subseteq K\subseteq L$ שרשרת שדות כך שכל ההרחבות הן גלואה. הוכיחו כי

$$\mathrm{N}_{L/F}=\mathrm{N}_{K/F}\,\mathrm{N}_{L/K}$$
$$\mathrm{Tr}_{L/F}=\mathrm{Tr}_{K/F}\,\mathrm{Tr}_{L/K}$$

4. תהי K/F הרחבת גלואה, $\mathrm{Gal}\,(K/F)=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$.
נזכיר כי **בסיס נורמלי** של K הוא בסיס של K כמ"ו מעל F מהצורה $\{\sigma_1(\alpha),\ldots,\sigma_n(\alpha)\}$ עבור $\alpha\in K$.

   א. הוכיחו כי $K=F[\alpha]$ אם ורק אם $\{\sigma_1(\alpha),\ldots,\sigma_n(\alpha)\}$ הם n איברים שונים.

ב. הסיקו כי כל איבר $\alpha \in K$ שמסלולו הוא בסיס נורמלי של K מעל F, הוא איבר פרימיטיבי.
כלומר: אם $\{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha)\}$ בסיס נורמלי, אז $K = F[\alpha]$.

ג. האם הכיוון ההפוך גם נכון? (האם כל איבר פרימיטיבי נותן בסיס נורמלי?).

5. יהי F שדה ממאפיין $\neq 2$, ותהי ${}^{E}\!/_{F}$ הרחבת גלואה כך ש $\mathrm{Gal}(E/F) \cong A_4$.
ידוע כי $A_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$ כאשר $\sigma = (123)$, $\tau = (12)(34)$.
כפי שלמדתם בהרצאה, $\mathrm{Tr}_{\,E/E^{\langle \sigma \rangle}}$ היא על. כלומר , $\mathrm{Tr}_{\,E/E^{\langle \sigma \rangle}}(E) = E^{\langle \sigma \rangle}$.
הוכיחו כי גם $\mathrm{Tr}_{\,E/E^{\langle \sigma \rangle}}\left(E^{\langle \tau \rangle}\right) = E^{\langle \sigma \rangle}$.
<u>רמז </u>(אופציונלי): מספיק להראות שהצמצום על $E^{\langle \tau \rangle}$ איננו אפס (למה?). אפשר להשתמש בבסיס נורמלי.

6. תהי ${}^{K}\!/_{F}$ הרחבת גלואה ממימד n, ונניח $\rho_m \in F$ כאשר ρ_m שורש יחידה m-פרימיטיבי.
הוכיחו כי **תנאי הכרחי לקיום** של הרחבת גלואה ציקלית ${}^{L}\!/_{F}$ כך ש ${}^{L}\!/_{K}$ מדרגה m הוא ש ρ_m הוא נורמה ב${}^{K}\!/_{F}$ (כלומר, קיים $x \in K$ כך ש $\mathrm{N}_{K/F}(x) = \rho_m$).
הוכיחו כי ρ_m הוא נורמה מK (כלומר שקיים $x \in K$ כך ש $\mathrm{N}_{K/F}(x) = \rho_m$).
<u>הנחייה</u>: נסמן $\mathrm{Gal}(L/F) = \langle \sigma \rangle$. מה החבורות של ההרחבות? הסבירו למה $L = K[\alpha]$ כאשר $\sigma^n(\alpha) = \rho_m \alpha$. השוו בין $\mathrm{N}_{L/F}(x)$ ו $\mathrm{N}_{K/F}(x)$ עבור $x = \dfrac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$.