תרגיל בית 7 - פתרון

1. הוכיחו כי לא כל הקבוצות המדידות לבג ב $\mathbb{R}$ מדידות בורל וכי לא כל פונקציה רציפה מעתיקה קבוצה מדידה לבג לקבוצה מדידה לבג.

הדרכה:

א. הגדירו את הפונקציה $g=\varphi+x$ המוגדרת על הקטע $[0,1]$ כאשר φ הינה פונקצית קנטור אשר הגדרנו בכיתה. הראו כי g רציפה, חד חד ערכית, עולה ממש ועל $[0,2]$.

ב. הראו כי $g([0,1]\setminus C)$ הינה קבוצה פתוחה עם מידת לבג 1 .מכאן שלקבוצה $g(C)$ מידה 1 כאשר C הינה קבוצת קנטור.

ג. השתמשו בעובדה כי אם E הינה קבוצה עם מידה חיובית אזי קיימת קבוצה $M\subseteq E$ כך ש M איננה מדידה לבג(לא למדנו את זה אבל זה נכון) והראו כי קיימת קבוצה לא מדידה ב $[0,2]$ כך ש $K=g^{-1}(M)$ הינה מדידה לבג.

ד. הראו כי K איננה מדידה בורל וכי $g(K)=M$.

2. תהי $f\geq 0$ פונקציה מדידה ואי-שלילית המקיימת $\int_X fd\mu=0$, הוכיחו כי הקבוצה שבה f חיובית-ממש היא בעלת מידה 0.

3. תהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu(X)<\infty$ אזי f אינגרבילית וגם $\int f_n\to\int f$.

שאלת בונוס: (לא חייבים)

יהי X מרחב מטרי , $\mathcal{B}$ הסיגמא – בורל ו μ המידה על $(X,\mathcal{B})$, אזי תומך (Support) של μ הינו הקבוצה הקטנה ביותר F של קבוצות סגורות כך ש $\mu(F^c)=0$. הראו כי אם F הינה קבוצה סגורה ב $[0,1]$, אזי קיימת מידה סופית על $[0,1]$ כך ש התומך שלה הוא F .