תרגול 6 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

1 מרחבים וקטוריים

הגדרה 1.1. יהי $\mathbb{F}$ שדה. **מרחב וקטורי** מעל $\mathbb{F}$ הוא קבוצה V עם שתי פעולות, חיבור וכפל בסקלר, המקיימות את האקסיומות הבאות:

1. אקסיומות הקשורות לחיבור:

   (א) סגירות: לכל $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 \in V$.

   (ב) אסוציאטיביות: לכל $v_1, v_2, v_3 \in V$, $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$.

   (ג) קומוטטיביות: לכל $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

   (ד) איבר ניטרלי לחיבור: קיים $0_V \in V$ כך שלכל $v \in V$, $0_V + v = v + 0_V = v$.

   (ה) איבר נגדי: לכל $v \in V$ קיים $(-v) \in V$ שעבורו $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$.

2. אקסיומות הקשורות לכפל בסקלר:

   (א) סגירות: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $\alpha v \in V$.

   (ב) פילוג בווקטורים: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v, w \in V$, $\alpha (v + w) = \alpha v + \alpha w$.

   (ג) פילוג בסקלרים: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$.

   (ד) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$, $(\alpha\beta) v = \alpha (\beta v)$.

   (ה) איבר היחידה: לכל $v \in V$, $1v = v$.

דוגמה 1.2. יהי $\mathbb{F}$ שדה. הדוגמאות הבאות הן מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$

1. $\mathbb{F}$ מרחב וקטורי מעל עצמו, כשפעולת הכפל בסקלר היא פעולת הכפל הרגילה בשדה.
2. $\mathbb{F}^n$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
3. $\mathbb{F}^{m\times n}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
4. אוסף הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית, $\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\}$, הוא מרחב וקטורי עם אותן פעולות כמו של $\mathbb{F}^n$.

5. אוסף הפולינומים עם דרגה לכל היותר n, $\mathbb{F}_n[x]$.

דוגמה 1.3. $\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
באופן כללי: אם $\mathbb{F}'$ תת-שדה של $\mathbb{F}$, אזי $\mathbb{F}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}'$.

טענה 1.4. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אזי:

1. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot 0_V = 0_V$.
2. לכל $v \in V$, $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$.
3. לכל $v \in V$, $-v = (-1) \cdot v$.
4. לכל $v, w \in V$, $-(v+w) = (-v) + (-w)$.

תרגיל 1.5. נסתכל על $\mathbb{R}^2$, ונגדיר עליו פעולה חדשה:

$$\alpha \odot (x,y) = \left(\alpha^2 x, \alpha^2 y\right)$$

האם $\left(\mathbb{R}^2, +, \odot\right)$ הוא מרחב וקטורי?

פתרון. כדי לבדוק האם זה מרחב וקטורי, צריך לבדוק את כל האקסיומות. אנחנו יודעים שהחיבור מתנהג בסדר, ולכן נבדוק את הכפל בסקלר. נבדוק את הפילוג בסקלרים: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ויהי $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. אזי

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta) \odot (x,y) &= \left((\alpha+\beta)^2 x, (\alpha+\beta)^2 y\right) = \left(\alpha^2 x + 2\alpha\beta x + \beta^2 x, \alpha^2 y + 2\alpha\beta y + \beta^2 y\right) \\ \alpha \odot (x,y) + \beta \odot (x,y) &= \left(\alpha^2 x, \alpha^2 y\right) + \left(\beta^2 x, \beta^2 y\right) = \left(\alpha^2 x + \beta^2 x, \alpha^2 y + \beta^2 y\right)\end{aligned}$$

רואים שהביטויים האלו אינם שווים, ולכן זה <u>לא</u> מרחב וקטורי.
דוגמה מפורשת: ניקח $\alpha = \beta = 1$, $(x,y) = (1,0)$. אזי

$$\begin{aligned}(1+1) \odot (1,0) &= 2 \odot (1,0) = (4,0) \\ 1 \odot (1,0) + 1 \odot (1,0) &= (1,0) + (1,0) = (2,0)\end{aligned}$$

תתי-מרחבים

הגדרה 1.6. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תת-קבוצה $U \subseteq V$ שהיא גם מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ עם אותן פעולות כמו של V נקראת **תת-מרחב** של V.

דוגמה 1.7.

1. לכל מרחב וקטורי יש שני תתי-מרחבים טריוויאליים: $V \subseteq V$ ו-$\{0_V\} \subseteq V$.
2. הקבוצה $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ היא תת-מרחב ב-$\mathbb{R}^2$. גיאומטרית, זהו ישר העובר בראשית הצירים.
באופן כללי יותר: כל ישר העובר דרך ראשית הצירים הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$.
אבל הישר $\{(x,y) \mid 5x - 3y + 7 = 0\}$ <u>אינו</u> תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$.
3. ב-$\mathbb{R}^3$, כל ישר וכל מישור העוברים דרך ראשית הצירים הם תתי-מרחבים. למשל, $U = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ הוא תת-מרחב (המייצג את המישור xy).

הערה 1.8. נניח $U \subseteq V$ תת-מרחב. אזי $0_U = 0_V$. לכן, כל תת-מרחב חייב להכיל את וקטור האפס.

טענה 1.9 (קריטריון מקוצר לתת-מרחב). $U \subseteq V$ הוא תת-מרחב של V אם ורק אם הוא מקיים את התנאים הבאים:

1. $0_V \in U$.
2. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $u, w \in U$, $\alpha u + \beta w \in U$.

תרגיל 1.10. נסתכל ב-$\mathbb{R}_3[x]$ על הקבוצה

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0, p(1) = p(-1)\}$$

האם U תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$?

פתרון. נוכיח ש-U תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$ לפי הקריטריון המקוצר:

1. ראשית, $0 \in U$ באופן ברור.
2. כעת, נניח $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו-$p(x), q(x) \in U$. לכן,

$$p(0) = q(0) = 0,\ \ p(1) = p(-1)\,,\ \ q(1) = q(-1)$$

נבדוק האם $\alpha p(x) + \beta q(x)$ מקיים את הדרישות:

$$\begin{aligned}(\alpha p(x) + \beta q(x))(0) &= (\alpha p(x))(0) + (\beta q(x))(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0\\ (\alpha p(x) + \beta q(x))(1) &= \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = (\alpha p(x) + \beta q(x))(0)\end{aligned}$$

קיבלנו ש-$\alpha p(x) + \beta q(x)$ אכן מקיים את הדרישות, ולכן $\alpha p(x) + \beta q(x) \in U$.

לכן U תת-מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

תרגיל 1.11. נסתכל ב-$\mathbb{R}_3[x]$ על הקבוצה

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 1, p(1) = p(-1)\}$$

האם U תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}_3[x]$?

פתרון. לא! כי $0 \notin U$, שהרי הצבת $x = 0$ בפולינום האפס נותנת 0.

חיתוך ואיחוד תתי-מרחבים

משפט 1.12. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים של V. אזי $U \cap W$ תת-מרחב של V.

משפט 1.13. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי-מרחבים של V. הוכיחו: $U \cup W$ תת-מרחב של V אם ורק אם $W \subseteq U$ או $U \subseteq W$.

הוכחה. $\boxed{\Rightarrow}$ אם $U \subseteq W$, אזי $U \cup W = W$; אם $W \subseteq U$, אזי $U \cup W = U$. בכל אחד מהמקרים קיבלנו את אחד מתתי-המרחבים המקוריים, ולכן זה תת-מרחב.

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח בשלילה ש-$W \not\subseteq U$ וגם $U \not\subseteq W$. לכן קיימים

$$\begin{cases} u \in U \\ u \notin W \end{cases} \text{ and } \begin{cases} w \in W \\ w \notin U \end{cases}$$

בכל מקרה, $u, w \in U \cup W$. לפי הנתון, $U \cup W$ תת-מרחב, ולכן $v = u + w \in U \cup W$. לפי הגדרת האיחוד, יש שתי אפשרויות:

1. $v \in U$ – ואז גם $v - u \in U$, כי U תת-מרחב. אבל אז $w = v - u \in U$, בסתירה לבחירת w.
2. $v \in W$ – ואז גם $v - w \in W$, כי W תת-מרחב. אבל אז $u = v - w \in W$, בסתירה לבחירת u.

בשני המקרים קיבלנו סתירה, ולכן $W \subseteq U$ או $U \subseteq W$.

$\square$

תרגיל 1.14. נתונים שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\right\} \\ W &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 6z = 0\right\} \end{aligned}$$

1. חשבו במפורש את $U \cap W$.
2. האם $U \cup W$ תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$? אם לא, הראו אקסיומה של מרחב וקטורי שאינה נכונה ב-$U \cup W$.

פתרון.

1. נניח $(x,y,z) \in U \cap W$. לכן (x,y,z) מקיים את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

נפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

לכן, $x = 0$ ו-$-y + 3z = 0$. $z = t$ הוא משתנה חופשי, ונקבל שמתקיים

$$U \cap W = \{(0, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

2. צריך לבדוק האם $U \subseteq W$ אם $W \subseteq U$. זה לא מתקיים:

$$\begin{cases} (1,-1,1) \in U \\ (1,-1,1) \notin W \end{cases} \text{ and } \begin{cases} (2,1,2) \in W \\ (2,1,2) \notin U \end{cases}$$

כדי להראות במפורש איזו אקסיומה אינה מתקיימת, ניעזר בהוכחה שלהלן. ראינו שהסתירה נוצרה עקב שימוש בסגירות לחיבור; לכן, נסתכל על הווקטור

$$(1,-1,1) + (2,1,2) = (3,0,3)$$

על ידי בדיקה ישירה, $(3,0,3) \notin U$ וגם $(3,0,3) \notin W$, ולכן $(3,0,3) \notin U \cup W$. זה מוכיח ש-$U \cup W$ אינו סגור לחיבור, כלומר זהו אינו תת-מרחב.

סכום של תתי-מרחבים

ראינו שאיחוד שני תתי-מרחבים אינו תת-מרחב בהכרח. היינו רוצים, בהינתן שני תתי-מרחבים U ו-W של V, למצוא את תת-המרחב הכי קטן שמכיל את שניהם. אנחנו יודעים שאם יש כזה תת-מרחב, נקרא לו Y, אז לכל $u \in U$ ולכל $w \in W$, $u + w \in Y$. זה הבסיס להגדרה הבאה:

הגדרה 1.15. יהיו $U, W \subseteq V$ שני תתי-מרחבים. נגדיר את **הסכום** שלהם להיות

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

משפט 1.16 (אפיון הסכום)**.**

1. $U + W$ הוא תת-מרחב של V.
2. אם Y תת-מרחב אחר של V המקיים $U, W \subseteq Y$, אזי $U + W \subseteq Y$.

תרגיל 1.17. עבור תתי-המרחבים $U, W \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, קבעו מהו $U + W$:

1. U = המטריצות הסימטריות; W = המטריצות האלכסוניות.
2. U = המטריצות הסימטריות; W = המטריצות המשולשיות עליונות.
3. U = המטריצות האנטי-סימטריות; W = מטריצות עם עקבה 0.

(להוסיף הגדרות בהתאם לצורך)

פתרון.

1. $W \subseteq U$, ולכן $U + W = U$.
2. $U + W = \mathbb{R}^{n\times n}$. דוגמה לפירוק עבור 2×2 (אפשר להכליל לכל $n \times n$):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b-c \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

3. $U \subseteq W$, ולכן $U + W = W$.