תזכורת: יש פונקציה $ON \to Car$: $\aleph$ המונים האינסופיים, ומוגדרת באופן הבא:

1. $\aleph_0 = \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$
3. לסודר גבולי, $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$

הוכחנו:

1. $\aleph$ היא פונקציה עולה. (ולכן בפרט היא חח"ע)

וכעת נוכיח:

2. $\aleph$ היא פונקציה על מחלקת המונים האינסופיים.

הוכחה:

נניח בשלילה ש$\aleph$ היא לא על המונים האינסופיים, ויהי κ המונה האינסופי הראשון שאין לו מקור.

נחלק למקרים:

אם κ מונה עוקב, נניח ש$\kappa = \lambda^+$, אז $\lambda < \kappa$ ולכן לפי ההנחה יש איזשהו סודר α כך ש$\lambda =$ $\aleph_\alpha$.

אז לפי הגדרת הפונקציה $\kappa = \lambda^+ = (\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$, בסתירה להנחה.

אם κ מונה גבולי: לכל $\lambda < \kappa$ מונה אינסופי, יש α כך ש$\aleph_\alpha = \lambda$.

κ מונה גבולי ולכן שווה לסופרימום/איחוד של כל המונים שקטנים ממנו, ואפשר להתעלם מהמונים הסופיים, ולכן $\kappa = \sup\{\lambda\}$ כאשר רצים על כל המונים האינסופיים שקטנים מκ.

נסתכל על קבוצת הסודרים $A = \{\alpha : \exists\lambda < \kappa, \lambda = \aleph_\alpha\}$. נשים לב הקבוצה הזאת טרנזיטבית כי אם $A \ni \alpha > \beta$ אז $\kappa > \aleph_\alpha > \aleph_\beta$ ולכן $\kappa > \aleph_\beta$ אז $\beta \in A$.

לכן A סודר.

נראה שA סודר גבולי. אכן, אם $\alpha \in A$ אז $\kappa > \aleph_\alpha$, ואז $\kappa \geq (\aleph_\alpha)^+ = \aleph_{\alpha+1}$, ועכשיו מכיוון ש$\kappa$ גבולי הוא לא שווה לעוקב של שום דבר, אז $\kappa > \aleph_{\alpha+1}$. ולכן $\alpha+1 \in A$.

$\aleph_A = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < A\}$ זה שווה לקבוצת כל המונים האינסופיים שקטנים מκ, לפי הגדרת A, ולכן הסופרימום הוא κ. קיבלנו $\kappa = \aleph_A$.

בסתירה לכן שאין מקור לκ.

ולכן $\aleph$ היא "פונקציה" על.

תזכורת: $cof(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$, כי הוכחנו שכל מונה עוקב הוא סדיר, כלומר הקופינליות שלו זה הוא בעצמו.

טענה: $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$ לכל סודר גבולי α.

הוכחה: לפי הגדרה, $\aleph_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$. נקח $D \subseteq \alpha$ קופינלית מהעוצמה המינימלית.

נסתכל על קבוצת $\{\aleph_\gamma\}_{\gamma\in D}$. היא קופינלית ב$\aleph_\alpha$ כי

$$\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$$

כלומר, לכל $\delta < \aleph_\alpha$ קיים $\beta < \alpha$ כך ש$\delta \in \aleph_\beta$. לכל β יש $\gamma \in D$ כך ש$\beta \leq \gamma$, לכן $\aleph_\beta \leq \aleph_\gamma$ ולכן $\delta \in \aleph_\gamma$. ומכאן נקבל ש$\{\aleph_\gamma\}_{\gamma\in D}$. היא קופינלית ב$\aleph_\alpha$.

הוכחנו ש$cof(\aleph_\alpha) \leq cof(\alpha)$.

לכיוון השני: תהי D תת קבוצה קופינלית של $\aleph_\alpha$ מהעוצמה המינימלית. לכל $\delta \in D$ קיים $\beta_\delta < \alpha$ כך ש$\delta < \aleph_{\beta_\delta}$. נטען ש$\{\beta_\delta\}_{\beta_\delta\in D}$ קופינלית בα. אכן, לכל $\gamma \in \alpha$ קיים $\delta \in D$ כך ש$\aleph_\gamma \leq \delta$. $\delta < \aleph_{\beta_\delta}$. אז $\aleph_\gamma < \aleph_{\beta_\delta}$. ולכן $\gamma < \beta_\delta$.

$$cof(\alpha) \leq |\{\beta_\delta\}_{\beta_\delta\in D}| \leq |D|$$

ולכן $cof(\alpha) \leq cof(\aleph_\alpha)$.
טענה: לפונקציית ה$\aleph$ יש נקודת שבת. כלומר, יש סודר (שבעצם הוא מונה) α כך ש$\alpha = \aleph_\alpha$.
הוכחה: נבנה סדרה בצורה רקורסיבית:

$$\alpha_0 = \omega$$

$$\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n}$$

$$\alpha = \sup\{\alpha_n\}$$

נשים לב שα הוא סודר גבולי. כי הוא סופרימום של עוצמות ולכן הוא בעצמו מונה, וכל מונה אינסופי הוא סודר גבולי.
ולכן

$$\aleph_\alpha = \sup \aleph_{\alpha_n} = \sup \alpha_{n+1} = \alpha$$

הערה: $cof(\alpha) = \omega$. כי $\{\alpha_n\}$ היא תת קבוצה קופינלית.
תרגיל (לתרגול): יהי κ מונה כלשהו, וλ מונה סדיר אינסופי, אז קיים מונה $\mu > \kappa$ ו$cof(\mu) = \lambda$ כך ש$\mu = \aleph_\mu$.
טענה: יהי κ מונה אינסופי. אזי $\kappa < \kappa^{cof(\kappa)}$.
הוכחה: ראשית, ברור ש$\kappa \leq \kappa^{cof(\kappa)}$.
נחלק למקרים.
κ מונה סדיר: $cof(\kappa) = \kappa$. אז $\kappa^{cof(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa > \kappa$.
κ מונה חריג: $cof(\kappa) < \kappa$. נסמן $\lambda = cof(\kappa)$. אז $\lambda < \kappa$.
יש פונקציה קופינלית (כלומר, שהתמונה קופינלית) $f : \lambda \to \kappa$.
נראה שאין פונקציה על $\kappa \to \kappa^{cof(\kappa)}$
תהי $g : \kappa \to {}^\lambda\kappa$ פונקציה כולשהי. המטרה שלנו היא לבנות איבר ב${}^\lambda\kappa$ שאין לו מקור.
כלומר, אנחנו צריכים לבנות $h : \lambda \to \kappa$.
יהי $\alpha < \lambda$. נסתכל על $f(\alpha) \in \kappa$. נסתכל על כל $\beta < f(\alpha)$. נסתכל על הקבוצה $\{g(\beta)(\alpha)\}_{\beta < f(\alpha)}$

$$|\{g(\beta)(\alpha)\}_{\beta<f(\alpha)}| \leq |\{g(\beta)\}_{\beta<f(\alpha)}| \leq |\{\beta\}_{\beta<f(\alpha)}| = |f(\alpha)| < \kappa$$

האי שוויון האחרון נובע מכך ש $f(\alpha) \in \kappa$ ולכן $|f(\alpha)| \leq f(\alpha) < \kappa$.
$\kappa \setminus \{g(\beta)(\alpha)\}_{\beta<f(\alpha)} \neq \emptyset$.

$$h(\alpha) = \min \kappa \setminus \{g(\beta)(\alpha)\}_{\beta<f(\alpha)}$$

כעת נוכיח שלכל $\beta \in \kappa$, $h \neq g(\beta)$.
אכן, יהי $\beta \in \kappa$. מכיוון ש$f : \lambda \to \kappa$ קופינלית, יש איזשהו $\alpha \in \lambda$ כך ש $\beta < f(\alpha)$.
נראה ש$h(\alpha) \neq g(\beta)(\alpha)$. אבל $h(\alpha)$ מוגדר להיות איבר שלא שייך ל$\{g(\beta)(\alpha)\}_{\beta<f(\alpha)}$.
אז ברור ש$h(\alpha) \neq g(\beta)(\alpha)$.
ולכן $h \neq g(\beta)$.

כלומר, g היא לא פונקציה על.

מסקנה: אם κ הוא מונה אינסופי ויש פונקציה קופינלית $\lambda \to \kappa$ אז $\kappa < \kappa^\lambda$. כי בהוכחה שעשינו לא השתמשנו בעובדה שλ הוא המינימלי שיש ממנו פונקציה קופינלית.

מסקנה: $\aleph_{\aleph_{18+\omega}} < \aleph_{\aleph_{18+\omega}}^{\aleph_0}$

הוכחה: $cof(\aleph_{\aleph_{18+\omega}}) = cof(\aleph_{18} + \omega) = \omega = \aleph_0$.

המעבר הראשון נובע מהעובדה ש $\aleph_{18} + \omega$ הוא סודר גבולי, ואז $cof(\aleph_\alpha) = cof(\alpha)$.

מסקנה: לכל מונה אינסופי λ, $cof(2^\lambda) > \lambda$

הוכחה: נב"ש $cof(2^\lambda) \le \lambda$. ידוע ש$2^\lambda < (2^\lambda)^{cof(2^\lambda)}$

ואז נקבל

$$2^\lambda < (2^\lambda)^{cof(2^\lambda)} \le (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda$$

סתירה.

הערה: אנחנו לא יודעים למה שווה $2^{\aleph_0}$. אולי זה $\aleph_1$, אולי זה $\aleph_2$, זה יכול להיות הרבה אפשרויות. אבל יש דברים שהוא בוודאות לא שווה להם, כל מונה שהקופינליות שלו היא $\aleph_0$. למשל, $\aleph_\omega$.

עוד קצת חישובי עוצמות

תזכורת: $\kappa^\lambda = |\{f : \lambda \to \kappa\}|$.

סימונים: תהי κ עוצמה כלשהי ו$\lambda \le \kappa$ עוצמה, אזי

$$[\kappa]^\lambda = \{A \subseteq \kappa : |A| = \lambda\}$$

$$[\kappa]^{<\lambda} = \{A \subseteq \kappa : |A| < \lambda\}$$

טענה: בבדידה הוכחתם ש$\omega = |[\omega]^{<\omega}|$

טענה: תהי κ עוצמה אינסופית ו$\lambda \le \kappa$ עוצמה כלשהי, אז $|[\kappa]^\lambda| = \kappa^\lambda$

הוכחה: $\kappa^\lambda \le |[\kappa]^\lambda|$. תהי $A \subseteq \kappa$ מעוצמה λ. לפי הגדרה, יש פונקציה חח"ע ועל $A \to \lambda$, וזה מגדיר פונקציה $\kappa \to \lambda$.

$\kappa^\lambda \ge |[\kappa]^\lambda|$: ידוע ש$\kappa = \kappa \cdot \kappa$. כלומר, יש פונקציה חח"ע ועל $f : \kappa \times \kappa \to \kappa$.

כעת תהי $h \in {}^\lambda\kappa$. אז $h \subseteq (\lambda \times \kappa) \subseteq (\kappa \times \kappa)$. $|h| = \lambda$. מהגדרת פונקציה (כל איברי λ משתתפים בזוג בדיוק פעם אחת). אז $f[h] \subseteq \kappa$ מעוצמה λ כי f היא חח"ע אז העוצמה של תת קבוצה שווה לעוצמת התמונה.

f היא חח"ע ולכן מעבירה תתי קבוצות שונות לתתי קבוצות שונות. וברור שפונקציות שונות הן בעצם תתי קבוצות שונות של $\kappa \times \lambda$.